ДЖ. ОКСТОБИ

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА
ПОПУЛЯРНАЯ СЕРИЯ

МЕРА И КАТЕГОРИЯ

Graduate Texts
in Mathematics

MEASURE AND CATEGORY

A Survey of the Analogies between Topological and Measure Spaces

BY JOHN C. OXTOBY

Professor of Mathematics,
Bryn Mawr College, Bryn Mawr, Pa.

SPRINGER-VERLAG

New York Heidelberg Berlin

1971

«СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА»
Популярная серия

ДЖ. ОКСТОБИ

Мера и категория

Перевод с английского
В. А. Скворцова

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва 1974

УДК 517.5 : 519.5

В этой книге изучаются важные понятия теории меры и теории множеств. Наиболее подробно рассматриваются понятия множества первой категории и множества меры нуль. Излагаются многочисленные приложения этих понятий в различных областях анализа.

Книга написана в хорошем стиле и при небольшом объеме затрагивает широкий круг вопросов. Она дает ценный материал для начальных семинаров по теории множеств и особенно полезна как учебное пособие при изучении основ теории множеств, теории меры и теории функций.

Книга рассчитана на широкий круг читателей, начиная от учащихся математических школ и студентов младших курсов университетов и педагогических институтов.

Редакция литературы по математическим наукам

О $\frac{20203\text{-}020}{041\,(01)\text{-}74}$ 20-74

ОТ ПЕРЕВОДЧИКА

Настоящая книга знакомит читателя с такими важными в теории множеств и теории функций понятиями, как мера Лебега и бэровская категория множества. Предпринятое автором изучение аналогий между этими понятиями помогает глубже проникнуть в их свойства и облегчает доказательства.

Важным достоинством книги является то, что основные понятия и идеи иллюстрируются на весьма богатом конкретном материале из разнообразных областей математики. В особенности большой интерес представляют собранные в книге многочисленные примеры применения метода категории при доказательстве существования различных математических объектов. Все это делает книгу весьма полезным пособием для начальных семинаров по теории меры, теории множеств и функций.

Книга написана так, что существенная ее часть доступна студентам младших курсов математических факультетов и даже учащимся математических школ, овладевшим лишь основами математического анализа и знакомым с основными понятиями алгебры множеств. Отдельные места книги, для понимания и освоения которых требуется знакомство с общей теорией порядковых и кардинальных чисел, могут быть опущены при первом чтении без ущерба для понимания дальнейшего. Некоторые главы, в которых автор излагает свои собственные результаты (например, гл. 18), представляют интерес и для специалистов.

Таким образом, можно надеяться, что предлагаемая книга привлечет к себе внимание достаточно широкого круга читателей.

В. А. Скворцов

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга посвящена двум основным темам: теореме Бэра о категории как методу доказательства теорем существования и вопросу о двойственности между мерой и категорией. Типичные применения метода категории иллюстрируются на разнообразных примерах, а аналогия между мерой и категорией прослеживается во всем многообразии ее проявлений. Для этого сообщаются элементарные сведения о топологии метрического пространства и выводятся основные свойства меры Лебега. В рассматриваемых нами вопросах оказывается возможным обойтись без интеграла Лебега, используя лишь интеграл Римана. Понятия общей теории меры и топологии вводятся здесь не просто ради большей общности, а используются по существу. Само собой разумеется, что термин «категория» всюду относится к категории Бэра; он не имеет ничего общего с одноименным термином из гомологической алгебры.

Книга предполагает предварительное знание элементов анализа и некоторое знакомство с алгеброй множеств. Обсуждаемые здесь вопросы естественным образом приспособлены к теоретико-множественному подходу. Книга задумана как введение в такого рода анализ. Ее можно использовать в качестве дополнения к стандартному курсу действительного анализа, как пособие для семинара или для самостоятельного изучения. В книге излагаются главным образом ранее известные результаты, однако в некоторых случаях они приводятся здесь с небольшими изменениями и усовершенствованиями, например, теорема 15.6 и предложение 20.4. Список литературы не претендует на полноту. Работы, на которые делаются ссылки, не всегда являются первоисточниками, но в них в свою очередь можно найти дополнительную библиографию.

Книга представляет собой переработанный и расширенный вариант записей, первоначально подготовленных для курса лекций в Гейверфордском колледже весной 1957 г., которые были осуществлены при поддержке фонда У. П. Филипса. Они в свою очередь базировались на лекциях памяти И. Р. Хедрика, прочитанных на летней сессии Американской математической ассоциации в Сиэтле, штат Вашингтон, в августе 1956 г.

Джон Окстоби

Брин-Мор
апрель 1971 г.

ГЛАВА I

МЕРА И КАТЕГОРИЯ НА ПРЯМОЙ

Понятия меры и категории опираются на понятие счетности. Естественным отправным пунктом при изучении этих понятий служит теорема Кантора, утверждающая, что никакой интервал действительных чисел не является счетным множеством. Напомним, что множество называется *счетным*, если его элементы можно поставить во взаимно однозначное соответствие с натуральными числами 1, 2, ... Если множество конечно или счетно, то будем иногда говорить, что оно *не более чем счетно*. Множество рациональных чисел счетно. В самом деле, для каждого положительного целого k имеется только конечное число ($\leqslant 2k-1$) рациональных чисел p/q, представленных в виде несократимой дроби, у которой $|p|+q=k$ (мы считаем, что $q>0$, а p и q взаимно просты). Занумеруем сначала числа, соответствующие $k=1$, затем те, для которых $k=2$, и т. д.; мы получим последовательность, в которой каждое рациональное число встречается один и только один раз. Теорема Кантора звучит так:

Теорема 1.1 (Кантор). *Для любой последовательности $\{a_n\}$ действительных чисел и для любого интервала I существует точка p из I, такая, что $p \neq a_n$ при всех n.*

Вот один из способов доказательства этой теоремы. Берем отрезок[1]) $I_1 \subset I$, такой, что $a_1 \notin I_1$. Затем берем отрезок $I_2 \subset I_1$, такой, что $a_2 \notin I_2$. Продолжая процесс по индукции, выберем в I_{n-1} отрезок

[1]) Отрезком, или замкнутым интервалом, будем называть множество точек x, удовлетворяющих неравенству вида $a \leqslant x \leqslant b$. Открытым интервалом, или просто интервалом, — множество x, удовлетворяющих неравенству $a < x < b$. — *Прим. перев.*

I_n, такой, что $a_n \notin I_n$. Полученная последовательность вложенных отрезков I_n имеет непустое пересечение. Если $p \in \bigcap\limits_n I_n$, то $p \in I$ и $p \neq a_n$ при всех n.

При этом доказательстве бесконечно много раз выбираются некие отрезки, однако ничего не говорится о том, как произвести такой выбор. Этого можно избежать, если ввести конкретное правило выбора. Будем, например, делить I_{n-1} на три отрезка равной длины и в качестве I_n брать первый слева из них, не содержащий точки a_n. Если в качестве I_0 взять отрезок, концентрический с интервалом I и в два раза меньшей длины, то выбор будет конкретно описан и мы получим вполне определенную функцию от $(I, a_1, a_2, \ldots)$, значениями которой являются точки интервала I, отличные от a_n при всех n.

Из теоремы Кантора непосредственно следует, что ни один интервал не является счетным множеством.

Приведенное рассуждение после небольших изменений оказывается пригодным и для доказательства теоремы Бэра о категории на прямой. Прежде чем сформулировать эту теорему, введем некоторые определения. Множество A называется *плотным в интервале* I, если оно имеет непустое пересечение с каждым подинтервалом из I. Будем говорить, что множество *плотно*, если оно плотно на всей действительной прямой R. Множество A называется *нигде не плотным*, если оно не является плотным ни в каком интервале, т. е. если каждый интервал содержит подинтервал, целиком принадлежащий дополнению к A (в нем, так сказать, «полно дыр»). Полезны еще такие два эквивалентные определения: A нигде не плотно тогда и только тогда, 1) когда его дополнение A' содержит плотное открытое множество или 2) когда $\bar{A}$ (или A^-) — замыкание множества A — не имеет ни одной внутренней точки. Класс нигде не плотных множеств замкнут относительно некоторых операций, а именно справедлива

Теорема 1.2. *Любое подмножество нигде не плотного множества нигде не плотно. Объединение двух* *(или любого конечного числа) нигде не плотных множеств нигде не плотно. Замыкание нигде не плотного множества нигде не плотно.*

Доказательство. Первое утверждение очевидно. Для доказательства второго заметим, что если A_1 и A_2 нигде не плотны, то для каждого интервала I найдутся интервалы $I_1 \subset I \setminus A_1$ и $I_2 \subset I_1 \setminus A_2$. Значит, $I_2 \subset I \setminus (A_1 \cup A_2)$, а это показывает, что $A_1 \cup A_2$ нигде не плотно. Наконец, любой открытый интервал, содержащийся в A', содержится также и в $\bar{A}'$. ■

Счетное объединение нигде не плотных множеств не является, вообще говоря, нигде не плотным; оно может быть даже плотным. Например, множество рациональных чисел плотно, но является счетным объединением отдельных точек (точнее, множеств, состоящих только из одной точки), каждая из которых — нигде не плотное множество в R.

Если множество можно представить в виде конечного или счетного объединения нигде не плотных множеств, то оно называется *множеством первой категории*. Подмножество из R, которое нельзя представить в таком виде, называется *множеством второй категории*. Эти определения были сформулированы в 1899 г. Бэром [12, стр. 86], которому принадлежит также следующая

Теорема 1.3 (Бэр). *Дополнение любого множества первой категории на прямой является плотным. Никакой интервал в R не является множеством первой категории. Пересечение любой последовательности плотных открытых множеств является плотным множеством.*

Доказательство. Три сформулированных утверждения по существу эквивалентны. Докажем первое. Пусть $A = \bigcup\limits_n A_n$ — представление A в виде счетного объединения нигде не плотных множеств. Для произвольного интервала I выберем отрезок $I_1 \subset I \setminus A_1$. Пусть I_2 — отрезок, принадлежащий $I_1 \setminus A_2$, и т. д. Тогда $\bigcap_n I_n$ — непустое подмножество множества $I \setminus A$, следовательно, A' плотно. Если мы хотим выбирать отрезки на любом этапе по заранее определенному правилу, то для этого достаточно представить счетное множество отрезков с рациональными концами в виде последовательности, положить $I_0 = I$, а затем для $n > 0$ брать в качестве I_n первый член указанной последовательности, содержащийся в $I_{n-1} \setminus A_n$.

Второе утверждение теоремы непосредственно следует из первого. Третье также следует из первого, если перейти к дополнениям. ■

Очевидно, что теорема Бэра содержит в себе утверждение теоремы Кантора. Доказательства этих теорем сходны, хотя мы и пользовались различными правилами выбора отрезков I_n.

Теорема 1.4. *Любое подмножество множества первой категории также является множеством первой категории. Объединение любого конечного или счетного семейства множеств первой категории является множеством первой категории.*

Эти свойства класса множеств первой категории очевидны. Заметим, что замыкание множества первой категории, вообще говоря, не будет множеством первой категории. На самом деле замыкание множества A есть множество первой категории тогда и только тогда, когда A нигде не плотно.

Класс множеств, который содержит всевозможные счетные объединения своих членов, а также любые подмножества своих членов, называется *σ-идеалом*. Класс множеств первой категории и класс не более чем счетных множеств представляют собой примеры σ-идеалов подмножеств прямой. Другой пример дает класс нуль-множеств, который мы сейчас определим.

Длину любого интервала I обозначим через $|I|$. Множество $A \subset R$ называется *нуль-множеством* (или *множеством меры нуль*), если для любого $\varepsilon > 0$ существует такая последовательность интервалов I_n, что $A \subset \bigcup_n I_n$ и $\sum |I_n| < \varepsilon$.

Очевидно, что отдельная точка является нуль-множеством и что любое подмножество нуль-множества является нуль-множеством. Любое счетное объединение нуль-множеств также является нуль-множеством. В самом деле, пусть A_i — нуль-множества при $i = 1, 2, \ldots$. Тогда для каждого i существует последовательность интервалов I_{ij} $(j = 1, 2, \ldots)$, такая, что $A_i \subset \bigcup_j I_{ij}$ и $\sum_j |I_{ij}| < \varepsilon/2^i$. Множество всех интервалов I_{ij} покрывает A и $\sum_{i,j} |I_{ij}| < \varepsilon$. Значит, A — нуль-множество. Тем самым доказано, что класс нуль-множеств является σ-идеалом. Подобно классу множеств первой категории он включает в себя все конечные и счетные множества.

Теорема 1.5 (Борель). *Если конечная или бесконечная последовательность интервалов I_n покрывает интервал I, то $\sum |I_n| \geqslant |I|$.*

Доказательство. Сначала предположим, что $I = [a, b]$ — отрезок, а все I_n — открытые интервалы. Пусть (a_1, b_1) — первый из интервалов последовательности, содержащий точку a. Если $b_1 \leqslant b$, то обозначим через (a_2, b_2) первый из интервалов последовательности, который содержит b_1. Если $b_{n-1} \leqslant b$, то пусть (a_n, b_n) — первый интервал, содержащий b_{n-1}. Этот процесс выбора интервалов должен оборваться при некотором $b_N > b$. В противном случае возрастающая последовательность $\{b_n\}$ сходилась бы к некоторому пределу $x \leqslant b$ и при этом точка x принадлежала бы I_k при каком-то k. Тогда в исходной последовательности интервалу I_k должны были бы предшествовать все выбранные интервалы (a_n, b_n), кроме, быть может, конечного числа из них, а именно все те, для которых $b_{n-1} \in I_k$. Но это невозможно, так как среди этих интервалов нет совпадающих. (Между прочим, именно так сам Борель доказывал «теорему

Гейне — Бореля» [5, стр. 228].) Получаем

$$b-a<b_N-a_1=\sum_{i=2}^{N}(b_i-b_{i-1})+b_1-a_1\leqslant\sum_{i=2}^{N}(b_i-a_i),$$

и, таким образом, теорема в этом случае доказана.

В общем случае[1]) для произвольного $\alpha>1$ обозначим через J замкнутый подинтервал интервала I, такой, что $|J|=|I|/\alpha$, а через J_n — открытый интервал, содержащий I_n, такой, что $|J_n|=\alpha|I_n|$. Тогда последовательность $\{J_n\}$ покрывает отрезок J. По доказанному, $\sum|J_n|\geqslant|J|$. Значит, $\alpha\sum|I_n|=\sum|J_n|\geqslant|J|=|I|/\alpha$. Полагая $\alpha\to 1$, мы придем к нужному результату. ■

Из этой теоремы следует, в частности, что никакой интервал не может быть множеством меры нуль. Это дает еще одно доказательство теоремы Кантора.

Каждое счетное множество является множеством первой категории и множеством меры нуль. Некоторые несчетные множества также принадлежат к обоим этим классам. Простейший пример дает *канторовское множество* C, состоящее из всех тех чисел отрезка $[0, 1]$, которые можно записать в виде троичной дроби, не используя цифру 1. Это множество можно построить, выбрасывая из отрезка $[0, 1]$ открытый интервал — среднюю треть этого отрезка, затем выбрасывая открытые средние трети у каждого из отрезков $[0, 1/3]$ и $[2/3, 1]$, и т. д. Если F_n обозначает объединение 2^n отрезков длины $1/3^n$, которые остались на n-м шаге, то $C=\bigcap_n F_n$. Множество C как пересечение замкнутых множеств замкнуто. Оно нигде не плотно, так как F_n (и, значит, C) не содержит ни одного интервала длины более $1/3^n$. Сумма длин отрезков, составляющих F_n, равна $(2/3)^n$, что при достаточно большом n меньше любого ε. Значит, C имеет меру нуль. Наконец, каждое число x из полуинтервала $(0, 1]$ имеет единственное разложение в бесконечную двоичную дробь $x=0, x_1x_2x_3\ \ldots$. Если положить

[1]) То есть когда I может быть интервалом, а среди I_n встречаются как отрезки, так и открытые интервалы. — *Прим. перев.*

$y_i = 2x_i$, то $0, y_1y_2y_3 \ldots$ будет троичным разложением (с $y_i \neq 1$) некоторой точки y из C. Это соответствие между x и y, дополненное условием, что 0 переходит в себя, дает взаимно однозначное отображение отрезка $[0, 1]$ на (собственное) подмножество множества C. Поэтому C несчетно; оно имеет мощность c (мощность континуума).

Множества меры нуль и множества первой категории образуют два σ-идеала, и каждый из них содержит класс счетных множеств. Из свойств этих σ-идеалов видно, что принадлежащие им множества «малы» в том или ином смысле. Нигде не плотное множество мало с интуитивно-геометрической точки зрения, так как оно все «изрешечено дырами», а множество первой категории можно «приблизить» таким множеством. В множестве первой категории может и не быть ни одной дырки, но у него всегда имеется плотное множество разрывов. Никакой интервал нельзя представить в виде счетного объединения таких множеств. С другой стороны, нуль-множество мало в метрическом смысле, поскольку его можно покрыть последовательностью интервалов сколь угодно малой общей длины. Если выбирать случайным образом точку на интервале и при этом вероятность ее принадлежности некоторому подинтервалу J считать пропорциональной $|J|$, то вероятность того, что она принадлежит некоторому заданному нуль-множеству, равна нулю. Естественно поинтересоваться, связаны ли как-нибудь между собой эти два понятия малости. Не входит ли один из классов в другой? Следующая теорема показывает, что это не так; более того, в некоторых случаях эти два понятия могут быть диаметрально противоположными.

Теорема 1.6. *Прямую можно разбить на два дополняющих друг друга множества A и B так, что A есть множество первой категории, а B имеет меру нуль.*

Доказательство. Пусть $a_1, a_2, \ldots$ — занумерованное множество рациональных чисел (или любое счетное плотное подмножество прямой). Пусть I_{ij} — интервал длины $1/2^{i+j}$ с центром в a_i. Положим $G_j = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_{ij}$ $(j = 1, 2, \ldots)$ и $B = \bigcap_{j=1}^{\infty} G_j$. Для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать j так, что $1/2^j < \varepsilon$. Тогда $B \subset \bigcup_i I_{ij}$ и $\sum_i |I_{ij}| = \sum_i 1/2^{i+j} = 1/2^j < \varepsilon$. Значит, B — нуль-множество. С другой стороны, G_j — плотное открытое подмножество прямой R, так как оно является объединением последовательности интервалов и содержит все рациональные точки. Значит, его дополнение G_j' нигде не плотно и $A = B' = \bigcup_j G_j'$ — множество первой категории. ■

Следствие 1.7. *Каждое подмножество прямой можно представить в виде объединения нуль-множества и множества первой категории.*

Конечно, в том, что множество, малое в одном смысле, в каком-то другом смысле может оказаться большим, нет ничего парадоксального.

ГЛАВА 2

ЧИСЛА ЛИУВИЛЛЯ

Теоремы Кантора, Бэра и Бореля являются *теоремами существования.* Если удается показать, что множество всех тех чисел интервала, которые не обладают некоторым свойством, либо счетно, либо меры нуль, либо первой категории, то отсюда следует, что существует точка интервала, которая обладает рассматриваемым свойством, и, более того, что этим свойством обладает большинство (соответственно в смысле мощности, или меры, или категории) точек интервала. Рассмотрим применение такого метода доказательства к вопросу о существовании трансцендентных чисел.

Комплексное число z называется *алгебраическим,* если оно удовлетворяет некоторому уравнению вида

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n = 0$$

с целыми коэффициентами, не все из которых равны нулю. *Степень* алгебраического числа z определяется как наименьшее положительное целое n, такое, что z удовлетворяет уравнению степени n. Например, любое рациональное число является алгебраическим первой степени, $\sqrt{2}$ — алгебраическое число второй степени, а $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ — алгебраическое число степени 4. Действительное число, не являющееся алгебраическим, называется *трансцендентным.* Существуют ли трансцендентные числа? В силу теоремы Кантора, ответ на этот вопрос дает следующая

Теорема 2.1. *Множество действительных алгебраических чисел счетно.*

Доказательство. Назовем число $n + \sum_0^n |a_i|$ весом полинома $f(x) = \sum_0^n a_i x^i$. Для любого заданного веса найдется лишь конечное число имеющих такой вес полиномов. Их можно как-то упорядочить, например по алфавитному принципу (т. е. в первую очередь учитывая степень n, затем величину a_0 и т. д.). Каждый полином, не являющийся константой, имеет вес не меньше 2. Взяв сначала все полиномы веса 2 в том порядке, который для них уже установлен, затем полиномы веса 3 и т. д., мы получим последовательность $f_1, f_2, f_3, \ldots$, в которой каждый полином степени 1 и выше появляется в точности один раз. У каждого полинома может быть лишь конечное число действительных корней. Занумеруем корни f_1, затем корни f_2 и т. д., пропуская те, которые уже встречались раньше. Таким способом мы занумеруем все алгебраические числа. Последовательность бесконечна, потому что в нее входят все рациональные числа. ■

Это, вероятно, самое простое доказательство существования трансцендентных чисел. Заметим, что это доказательство нельзя считать непрямым: если заранее зафиксировать конкретное правило выбора, то конструкция, использованная для доказательства теоремы 1.1, приводит к вполне определенному трансцендентному числу из $[0, 1]$. Хотя вычисление даже нескольких знаков в его десятичном разложении может оказаться довольно трудоемким, в принципе это число можно вычислить с любой заданной точностью.

Больше информации дает более раннее доказательство существования трансцендентных чисел, принадлежащее Лиувиллю. Оно опирается на следующую лемму:

Лемма 2.2. *Для любого действительного алгебраического числа z степени $n > 1$ найдется положительное целое M, такое, что*

$$\left| z - \frac{p}{q} \right| > \frac{1}{Mq^n}$$

при всех целых p и q, $q > 0$.

Доказательство. Пусть $f(x)$ — полином степени n с целыми коэффициентами, для которого $f(z) = 0$. Пусть M — такое положительное целое число, что $|f'(x)| \leqslant M$, как только $|z-x| \leqslant 1$. Тогда по теореме о среднем значении

(1) $|f(x)| = |f(z) - f(x)| \leqslant M|z-x|$ при $|z-x| \leqslant 1$.

Возьмем теперь любые два целых числа p и q, $q>0$. Нужно показать, что $|z-p/q| > 1/Mq^n$. Очевидно, что в случае $|z-p/q|>1$ это верно, поэтому можно предположить, что $|z-p/q| \leqslant 1$. Тогда, в силу (1), $|f(p/q)| \leqslant M|z-p/q|$ и, значит,

$$(2) \qquad |q^n f(p/q)| \leqslant Mq^n |z-p/q|.$$

Уравнение $f(x)=0$ не имеет рациональных корней (иначе z удовлетворяло бы уравнению степени меньшей n). Кроме того, $q^n f(p/q)$ является целым числом. Следовательно, левая часть неравенства (2) не меньше 1, и мы получаем, что $|z-p/q| \geqslant 1/Mq^n$. Равенство невозможно, потому что z иррационально. ■

Действительное число z называется *числом Лиувилля*, если оно иррационально и если для каждого положительного целого n существуют целые p и q, такие, что

$$|z-p/q| < 1/q^n \quad \text{и} \quad q>1.$$

Например, $z = \sum\limits_{1}^{\infty} 1/10^{k!}$ является числом Лиувилля (возьмите $q = 10^{n!}$).

Теорема 2.3. *Любое число Лиувилля трансцендентно.*

Доказательство. Допустим, что какое-то число Лиувилля z оказалось алгебраическим степени n. Тогда $n>1$, так как z иррационально. По лемме 2.2 найдется такое натуральное M, что

$$(3) \qquad |z-p/q| > 1/Mq^n$$

для всех целых p и q, $q>0$. Выберем целое $k>0$, такое, что $2^k \geqslant 2^n M$. Поскольку z — число Лиувилля, существуют целые p и q, $q>1$, такие, что

$$(4) \qquad |z-p/q| < 1/q^k.$$

Из (3) и (4) следует, что $1/q^k > 1/Mq^n$. Значит, $M > q^{k-n} \geqslant 2^{k-n} \geqslant M$, т. е. мы пришли к противоречию. ■

Рассмотрим множество E чисел Лиувилля. Из определения сразу следует, что

$$E = Q' \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n\right), \tag{5}$$

где Q — множество рациональных чисел, а

$$G_n = \bigcup_{q=2}^{\infty} \bigcup_{p=-\infty}^{\infty} (p/q - 1/q^n,\ p/q + 1/q^n).$$

Множество G_n представляет собой объединение интервалов. Кроме того, в G_n входят все числа вида p/q, $q \geqslant 2$, значит, $G_n \supset Q$. Следовательно, G_n — плотное открытое множество, и, значит, его дополнение нигде не плотно. Так как, согласно (5), $E' = Q \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} G'_n\right)$, то отсюда видно, что E' — множество первой категории. Таким образом, по теореме Бэра трансцендентные числа Лиувилля имеются в каждом интервале и, следовательно, в смысле категории представляют собой «типичный случай».

Что можно сказать о мере множества E? Из (5) следует, что $E \subset G_n$ для любого n. Положим

$$G_{n,q} = \bigcup_{p=-\infty}^{\infty} (p/q - 1/q^n,\ p/q + 1/q^n) \qquad (q = 2, 3, \ldots).$$

Для любых двух натуральных чисел m и n имеем

$$E \cap (-m, m) \subset G_n \cap (-m, m) =$$
$$= \bigcup_{q=2}^{\infty} [G_{n,q} \cap (-m, m)] \subset \bigcup_{q=2}^{\infty} \bigcup_{p=-mq}^{mq} (p/q - 1/q^n,\ p/q + 1/q^n).$$

Значит, $E \cap (-m, m)$ можно покрыть последовательностью интервалов, сумма длин которых для любого

$n > 2$ равна

$$\sum_{q=2}^{\infty} \sum_{p=-mq}^{mq} 2/q^n =$$

$$= \sum_{q=2}^{\infty} (2mq+1)(2/q^n) \leqslant \sum_{q=2}^{\infty} (4mq+q)(1/q^n) =$$

$$= (4m+1) \sum_{q=2}^{\infty} 1/q^{n-1} \leqslant (4m+1) \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{n-1}} = \frac{4m+1}{n-2}.$$

Отсюда видно, что $E \cap (-m, m)$ является нуль-множеством для любого m и, значит, E — нуль-множество.

Таким образом, E мало в смысле меры, но велико в смысле категории. Множества E и E' дают еще один пример разбиения прямой на множество меры нуль и множество первой категории (см. теорему 1.6). Более того, множество E, как мы сейчас покажем, мало и в некотором еще более сильном смысле.

Пусть s — положительное число и $E \subset R$; говорят, что E имеет *нулевую s-мерную меру Хаусдорфа*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует последовательность интервалов I_n, такая, что $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} |I_n|^s < \varepsilon$ и $|I_n| < \varepsilon$ при всех n. Множества нулевой s-мерной меры образуют σ-идеал. При $s = 1$ он совпадает с классом нуль-множеств, а при $0 < s < 1$ является его собственным подклассом. Таким образом, следующая теорема служит усилением утверждения о том, что E является нуль-множеством.

Теорема 2.4. *Множество E чисел Лиувилля имеет нулевую s-мерную меру Хаусдорфа при любом $s > 0$.*

Доказательство. Достаточно для любого $\varepsilon > 0$ и для любого положительного целого m найти такую последовательность интервалов I_n, что

$$E \cap (-m, m) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |I_n|^s < \varepsilon \quad \text{и} \quad |I_n| < \varepsilon.$$

При любом положительном целом n имеем

$$E \cap (-m, m) \subset \bigcup_{q=2}^{\infty} \bigcup_{p=-mq}^{mq} (p/q - 1/q^n,\ p/q + 1/q^n).$$

Выберем n, удовлетворяющее одновременно следующим условиям:

$$1/2^{n-1} < \varepsilon, \quad ns > 2, \quad \frac{(2m+1)\,2^s}{ns-2} < \varepsilon.$$

Тогда каждый из интервалов $(p/q - 1/q^n,\ p/q + 1/q^n)$ имеет длину $2/q^n \leqslant 2/2^n < \varepsilon$, и мы получаем

$$\sum_{q=2}^{\infty} \sum_{p=-mq}^{mq} (2/q^n)^s = \sum_{q=2}^{\infty} \frac{(2mq+1)\,2^s}{q^{ns}} \leqslant$$

$$\leqslant (2m+1)\,2^s \sum_{q=2}^{\infty} \frac{1}{q^{ns-1}} \leqslant (2m+1)\,2^s \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{ns-1}} =$$

$$= \frac{(2m+1)\,2^s}{ns-2} < \varepsilon. \ \blacksquare$$

ГЛАВА 3

МЕРА ЛЕБЕГА В r-МЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Интервалом I в r-мерном ($r = 1, 2, \ldots$) евклидовом пространстве будем называть прямоугольный параллелепипед с ребрами, параллельными осям. Он является декартовым произведением r одномерных интервалов. Как и в одномерном случае, r-мерный объем интервала I будем обозначать через $|I|$. Мера Лебега в r-мерном пространстве является расширением понятия объема на больший класс множеств. Таким образом, мера Лебега имеет разный смысл в пространствах разной размерности. Но так как мы обычно будем рассматривать фиксированную размерность, то у нас не будет необходимости явно указывать r в обозначениях.

Будем говорить, что последовательность интервалов I_i *покрывает* множество A, если их объединение содержит A. Нижняя грань сумм $\sum |I_i|$ по всевозможным последовательностям $\{I_i\}$, покрывающим A, называется *внешней мерой* множества A и обозначается $m^*(A)$. Итак, для любого подмножества A евклидова r-мерного пространства

$$m^*(A) = \inf \left\{ \sum |I_i|;\ A \subset \bigcup_i I_i \right\}.$$

В случае, когда A принадлежит определенному классу множеств, который мы вскоре опишем, $m^*(A)$ будет называться мерой Лебега множества A и обозначаться $m(A)$.

Ребра[1]) интервалов I_i могут быть замкнутыми, открытыми, полуоткрытыми, а последовательность интервалов может быть конечной или бесконечной. Может случиться, что ряд $\sum |I_i|$ расходится для любой

[1]) Точнее, одномерные интервалы, декартовым произведением которых являются r-мерные интервалы. — *Прим. перев.*

последовательности $\{I_i\}$, покрывающей A; в таком случае $m^*(A)=\infty$. Во всех других случаях $m^*(A)$ — неотрицательное действительное число.

Наше определение можно слегка видоизменить, не вызывая при этом изменения численного значения $m^*(A)$. Во-первых, можно потребовать, чтобы диаметры всех интервалов I_i были меньше некоторого данного положительного δ. Это ясно, поскольку каждый интервал можно разбить на подинтервалы диаметра меньше δ, и при этом значение суммы их объемов не изменится. Во-вторых, мы можем потребовать, чтобы все интервалы были открытыми. Для любой покрывающей последовательности $\{I_i\}$ и любого $\varepsilon>0$ мы можем найти открытые интервалы J_i, такие, что $I_i\subset J_i$ и $\sum|J_i|\leqslant\sum|I_i|+\varepsilon$. Значит, нижняя грань для открытых покрытий будет такой же, как и для всех покрывающих последовательностей.

Выведем теперь несколько свойств внешней меры.

Теорема 3.1. *Если* $A\subset B$, *то* $m^*(A)\leqslant m^*(B)$.

Это очевидно, потому что любая последовательность $\{I_i\}$, покрывающая B, покрывает также и A.

Теорема 3.2. *Если* $A=\bigcup\limits_i A_i$, *то* $m^*(A)\leqslant\sum m^*(A_i)$.

Это свойство внешней меры называют *счетной субаддитивностью*. Для любого $\varepsilon>0$ найдется последовательность интервалов I_{ij} $(j=1, 2, \ldots)$, покрывающая A_i и такая, что $\sum\limits_j|I_{ij}|\leqslant m^*(A_i)+\varepsilon/2^i$. Тогда $A\subset\bigcup\limits_{i,j}I_{ij}$ и $\sum\limits_{i,j}|I_{ij}|\leqslant\sum\limits_i m^*(A_i)+\varepsilon$. Следовательно, $m^*(A)\leqslant\sum m^*(A_i)+\varepsilon$. Полагая $\varepsilon\to 0$, получаем требуемое неравенство.

Теорема 3.3. *Для любого интервала* I *имеем* $m^*(I)=|I|$.

Доказательство. Неравенство $m^*(I)\leqslant|I|$ очевидно, так как I покрывает себя. Для доказательства обратного неравенства возьмем произвольное положительное ε и такое открытое покрытие $\{I_i\}$ интервала I, что $\sum|I_i|<m^*(I)+\varepsilon$. Пусть J — замкнутый подинтервал в I, такой, что $|J|>|I|-\varepsilon$. По теореме Гейне — Бореля $J\subset\bigcup\limits_1^k I_i$ при некотором k. Пусть $K_1, \ldots, K_n$ — как-то перенумерованные замкнутые интервалы, на которые разобьются $\bar{I}_1, \ldots, \bar{I}_k$, если через каждую $(r-1)$-мерную грань интервалов $I_1, \ldots, I_k$ и J провести содержащую ее $(r-1)$-мерную гиперплоскость, и пусть $J_1, \ldots, J_m$ — замкнутые интервалы, на которые те же гиперплоскости делят J. Тогда каждый интервал J_i совпадает по крайней мере с одним из интервалов K_j. Следовательно,

$$|J|=\sum_{i=1}^{m}|J_i|\leqslant\sum_{j=1}^{n}|K_j|=\sum_{i=1}^{k}|I_i|<m^*(I)+\varepsilon.$$

Значит, $|I|\leqslant m^*(I)+2\varepsilon$. Искомое неравенство получается, если ε устремить к нулю. ■

Обобщая определение из гл. 1, назовем любое подмножество r-мерного пространства с нулевой внешней мерой *нуль-множеством*, или *множеством меры нуль*. Если какое-то утверждение справедливо для всех точек множества E, кроме некоторого множества меры нуль, то будем говорить, что это утверждение справедливо *почти всюду* или для *почти всех* точек E.

Выведем теперь некоторые результаты, которые затем окажутся частными случаями доказанных в дальнейшем теорем. Поэтому назовем их леммами.

Лемма 3.4. *Если F_1 и F_2 — не пересекающиеся ограниченные замкнутые множества, то $m^*(F_1\cup F_2)=m^*(F_1)+m^*(F_2)$.*

Доказательство. Найдется положительное число δ, такое, что никакой интервал диаметра меньше δ не пересекается одновременно с F_1 и F_2. Для любого $\varepsilon>0$ существует последовательность интервалов I_i диаметра меньше δ, такая, что $F_1\cup F_2\subset\bigcup\limits_i I_i$ и $\sum|I_i|\leqslant m^*(F_1\cup F_2)+\varepsilon$. Через $\sum'|I_i|$ обозначим сумму по тем интервалам, которые пересекаются с F_1, а через $\sum'' |I_i|$ — сумму по оставшимся интервалам (которые покрывают F_2). Тогда

$$m^*(F_1) + m^*(F_2) \leqslant \sum' |I_i| + \sum'' |I_i| =$$
$$= \sum |I_i| \leqslant m^*(F_1 \cup F_2) + \varepsilon.$$

Полагая $\varepsilon \to 0$, заключаем, что

$$m^*(F_1) + m^*(F_2) \leqslant m^*(F_1 \cup F_2).$$

Обратное неравенство следует из теоремы 3.2. ■

Лемма 3.5. *Если $F_1, \ldots, F_n$ — ограниченные непересекающиеся замкнутые множества, то* $m^*\left(\bigcup\limits_1^n F_i\right) = \sum\limits_1^n m^*(F_i)$.

Это следует из леммы 3.4, если применить индукцию по n.

Лемма 3.6. *Для любого ограниченного открытого множества G и любого $\varepsilon > 0$ существует замкнутое множество F, такое, что $F \subset G$ и $m^*(F) > m^*(G) - \varepsilon$.*

Доказательство. Множество G можно представить в виде объединения последовательности неперекрывающихся интервалов I_i. По определению $m^*(G) \leqslant \sum |I_i|$. Подберем n так, чтобы $\sum\limits_1^n |I_i| > m^*(G) - \varepsilon/2$, и обозначим через J_i отрезок, содержащийся в I_i и такой, что $|J_i| > |I_i| - \varepsilon/2n$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Тогда $F = \bigcup\limits_1^n J_i$ — замкнутое подмножество G и, по теореме 3.3 и лемме 3.5, $m^*(F) = \sum\limits_1^n |J_i| > \sum\limits_1^n |I_i| - \varepsilon/2 > m^*(G) - \varepsilon$. ■

Лемма 3.7. *Если F — замкнутое подмножество ограниченного открытого множества G, то $m^*(G \setminus F) = m^*(G) - m^*(F)$.*

Доказательство. По лемме 3.6, для любого $\varepsilon > 0$ найдется замкнутое подмножество F_1 открытого множества $G \setminus F$, такое, что $m^*(F_1) > m^*(G \setminus F) - \varepsilon$. По лемме 3.4 и теореме 3.1,

$$m^*(F) + m^*(G \setminus F) < m^*(F) + m^*(F_1) + \varepsilon = \\ = m^*(F \cup F_1) + \varepsilon \leqslant m^*(G) + \varepsilon.$$

Полагая $\varepsilon \to 0$, заключаем, что

$$m^*(F) + m^*(G \setminus F) \leqslant m^*(G).$$

Обратное неравенство следует из теоремы 3.2. ∎

Определение 3.8. Множество A *измеримо* (в смысле Лебега), если для любого $\varepsilon > 0$ найдутся замкнутое множество F и открытое множество G, такие, что $F \subset A \subset G$ и $m^*(G \setminus F) < \varepsilon$.

Лемма 3. 9. *Если A измеримо, то и A' измеримо.*

В самом деле, если $F \subset A \subset G$, то $F' \supset A' \supset G'$ и $F' \setminus G' = G \setminus F$.

Лемма 3.10. *Если A и B измеримы, то и $A \cap B$ измеримо.*

Доказательство. Пусть F_1 и F_2 — замкнутые, а G_1 и G_2 — открытые множества, такие, что $F_1 \subset A \subset G_1$, $F_2 \subset B \subset G_2$, $m^*(G_1 \setminus F_1) < \varepsilon/2$, $m^*(G_2 \setminus F_2) < \varepsilon/2$. Тогда $F = F_1 \cap F_2 \subset A \cap B \subset G_1 \cap G_2 = G$ и

$$G \setminus F \subset (G_1 \setminus F_1) \cup (G_2 \setminus F_2).$$

Значит, $m^*(G \setminus F) \leqslant m^*(G_1 \setminus F_1) + m^*(G_2 \setminus F_2) < \varepsilon$. ∎

Лемма 3.11. *Ограниченное множество A измеримо, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется замкнутое множество $F \subset A$, такое, что $m^*(F) > m^*(A) - \varepsilon$.*

Доказательство. Для некоторого произвольного $\varepsilon > 0$ пусть F — такое замкнутое подмножество в A, что $m^*(F) > m^*(A) - \varepsilon/2$. Так как $m^*(A) < \infty$, то найдется покрывающая A последовательность интервалов I_i диаметра меньше 1, такая, что $\sum |I_i| < m^*(A) + \varepsilon/2$. Пусть G — объединение тех интервалов I_i, которые пересекаются с A. Тогда $F \subset A \subset G$, G ограничено и, по лемме 3.7, $m^*(G \setminus F) = m^*(G) - m^*(F) \leqslant \leqslant \sum |I_i| - m^*(F) < m^*(A) + \varepsilon/2 - m^*(F) < \varepsilon$. Значит, A измеримо. ■

Лемма 3.12. *Любой интервал и любое нуль-множество измеримы.*

Доказательство. Первое утверждение немедленно следует из леммы 3.11 и теоремы 3.3. Если $m^*(A) = 0$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется покрывающая A последовательность открытых интервалов I_i, такая, что $\sum |I_i| < \varepsilon$. Возьмем $G = \bigcup_i I_i$ и $F = \varnothing$. Тогда F замкнуто, G открыто, $F \subset A \subset G$ и $m^*(G \setminus F) \leqslant \sum |I_i| < \varepsilon$. Значит, A измеримо. ■

Лемма 3.13. *Пусть $\{A_i\}$ — последовательность непересекающихся измеримых множеств, и пусть все они содержатся в некотором интервале I. Если $A = \bigcup_i A_i$, то A измеримо и $m^*(A) = \sum m^*(A_i)$.*

Доказательство. Для любого $\varepsilon > 0$ существуют замкнутые множества $F_i \subset A_i$, такие, что $m^*(F_i) > m^*(A_i) - \varepsilon/2^{i+1}$. В силу счетной субаддитивности, $m^*(A) \leqslant \sum_1^\infty m^*(A_i)$. Найдем такое k, что

$$\sum_1^k m^*(A_i) > m^*(A) - \varepsilon/2,$$

и положим $F = \bigcup_1^k F_i$. Тогда, по лемме 3.5,

$$m^*(F) = \sum_1^k m^*(F_i) > \sum_1^k m^*(A_i) - \varepsilon/2 > m^*(A) - \varepsilon.$$

Значит, по лемме 3.11, A измеримо. Для любого n выполняется неравенство

$$\sum_1^n m^*(A_i) < \sum_1^n m^*(F_i) + \varepsilon/2 =$$

$$= m^*\left(\bigcup_1^n F_i\right) + \varepsilon/2 \leqslant m^*(A) + \varepsilon/2.$$

Полагая $n \to \infty$ и $\varepsilon \to 0$, получаем, что $\sum_1^\infty m^*(A_i) \leqslant \leqslant m^*(A)$. Обратное неравенство следует из счетной субаддитивности. ■

Лемма 3.14. *Для любой последовательности непересекающихся измеримых множеств A_i множество $A = \bigcup_i A_i$ измеримо и $m^*(A) = \sum m^*(A_i)$.*

Доказательство. Пусть I_j $(j = 1, 2, \ldots)$ — последовательность непересекающихся интервалов, объединение которых совпадает со всем r-мерным пространством, причем любое ограниченное множество покрывается конечным числом этих интервалов. По леммам 3.10 и 3.12, множества $A_{ij} = A_i \cap I_j$ измеримы и попарно не пересекаются. Положим $B_j = \bigcup_i A_{ij}$. По лемме 3.13, B_j — измеримое подмножество в I_j. Множества B_j не пересекаются и $A = \bigcup_j B_j$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдутся замкнутые множества F_j и ограниченные открытые множества G_j, такие, что $F_j \subset B_j \subset G_j$ и $m^*(G_j \setminus F_j) < \varepsilon/2^j$. Пусть $F = \bigcup_j F_j$ и $G = \bigcup_j G_j$. Тогда F замкнуто, так как любая содержащаяся в F сходящаяся последовательность ограничена и, значит, содержится в объединении конечного числа F_j, т. е. в замкнутом подмножестве множества F. Множество G открыто. Кроме того, $F \subset A \subset G$ и $G \setminus F = \bigcup_j (G_j \setminus F) \subset \bigcup_j (G_j \setminus F_j)$. Значит, $m^*(G \setminus F) \leqslant \leqslant \sum m^*(G_j \setminus F_j) < \varepsilon$. Это показывает, что A измеримо. Так как $A_i = \bigcup_j A_{ij}$, то $m^*(A_i) \leqslant \sum_j m^*(A_{ij})$ и, следовательно,

$$\sum_i m^*(A_i) \leqslant \sum_{i,j} m^*(A_{ij}) = \sum_j \sum_i m^*(A_{ij}) = \sum_j m^*(B_j)$$

по лемме 3.13. Кроме того, для любого n

$$\sum_1^n m^*(B_j) \leqslant \sum_1^n m^*(F_j) + \sum_1^n m^*(G_j \setminus F_j) \leqslant$$
$$\leqslant m^*\left(\bigcup_1^n F_j\right) + \varepsilon \leqslant m^*(A) + \varepsilon.$$

Полагая $n \to \infty$, а затем $\varepsilon \to 0$, получаем, что $\sum_j m^*(B_j) \leqslant m^*(A)$. Итак, $\sum m^*(A_i) \leqslant m^*(A)$. Обратное неравенство опять-таки следует из счетной субаддитивности. ■

Мы установили наиболее важные свойства внешней меры. Для того чтобы сформулировать их в более удобной форме, нам потребуется еще несколько определений.

Непустой класс S подмножеств некоторого множества X называется *кольцом* подмножеств множества X, если он содержит объединение и разность любых двух своих членов. Он называется *σ-кольцом*, если он содержит также объединение любой последовательности своих членов. Кольцо (или σ-кольцо) подмножеств множества X называется *алгеброй* (соответственно *σ-алгеброй*) подмножеств множества X, если само X является элементом кольца. Очевидно, что некоторый класс подмножеств из X является алгеброй тогда и только тогда, когда он замкнут относительно операций объединения (или пересечения) и взятия дополнения; он является σ-алгеброй, если он к тому же замкнут относительно счетного объединения (или счетного пересечения).

Функция множества μ, определенная на кольце S подмножеств из X, называется *счетно-аддитивной*, если для любой последовательности $\{A_i\}$ непересекающихся членов кольца S, объединение которых также принадлежит S, справедливо равенство $\mu(A) = \sum \mu(A_i)$. Неотрицательную счетно-аддитивную функцию множества μ, определенную на σ-кольце S подмножеств множества X, принимающую значения на расширенной действительной оси и такую, что

$\mu(\varnothing)=0$, называют *мерой*. Набор (X, S, μ), где S есть σ-кольцо подмножеств из X, а μ — мера, определенная на S, называется *пространством с мерой*. Принадлежащие S множества называются μ-*измеримыми*. Если при этом каждое подмножество любого множества μ-меры нуль принадлежит S (т. е. если множества μ-меры нуль образуют σ-идеал), то такое пространство с мерой называется *полным*.

В силу лемм 3.9, 3.10, 3.12 и 3.14 класс S измеримых множеств является σ-алгеброй подмножеств r-мерного пространства, а m^* является счетно-аддитивной на S. Значит, сужение m^* на S является мерой; она называется (r-мерной) *мерой Лебега* и обозначается m. Так как S включает все интервалы, то S включает и все открытые множества, все замкнутые множества, все F_σ-множества (счетные объединения замкнутых множеств) и все G_δ-множества (счетные пересечения открытых множеств). Более того, справедлива

Теорема 3.15. *Множество A измеримо тогда и только тогда, когда его можно представить в виде объединения F_σ-множества и нуль-множества (или в виде разности G_δ-множества и нуль-множества).*

Доказательство. Раз A измеримо, то для каждого n существуют замкнутое множество F_n и открытое множество G_n, такие, что $F_n \subset A \subset G_n$ и $m^*(G_n \setminus F_n) < 1/n$. Положим $E = \bigcup_n F_n$ и $N = A \setminus E$. Тогда E есть F_σ-множество. При этом N — нуль-множество, так как $N \subset G_n \setminus F_n$ и $m^*(N) < 1/n$ для любого n. Итак, A является объединением непересекающихся множеств E и N.

Переходя к дополнениям, получаем, что A также можно представить как G_δ-множество минус некоторое нуль-множество. Обратно, любое множество, представимое в таком виде, измеримо; это следует из леммы 3.12 и того, что S является σ-алгеброй. ■

Для любого класса подмножеств множества X найдется наименьшая σ-алгебра подмножеств X, содержащая этот класс. Это будет пересечение всех таких σ-алгебр. Она называется *σ-алгеброй, порожденной данным классом.* Элементы σ-алгебры, порожденной классом открытых множеств r-мерного пространства (или классом замкнутых множеств, или интервалами), называются *борелевскими множествами.* Таким образом, каждое борелевское множество r-мерного пространства является измеримым. По теореме 3.15 борелевские множества вместе с нуль-множествами порождают класс измеримых множеств. Суммируя все сказанное, получаем такое утверждение:

Теорема 3.16. *Класс S измеримых множеств является σ-алгеброй подмножеств r-мерного пространства X, порожденной открытыми множествами вместе с нуль-множествами. Мера Лебега m — это такая мера на S, что $m(I) = |I|$ для любого интервала I. Тройка (X, S, m) является полным пространством с мерой.*

Свойство счетной аддитивности часто бывает удобнее выражать в следующей форме:

Теорема 3.17. *Если при любом i множество A_i измеримо и $A_i \subset A_{i+1}$, то множество $A = \bigcup_i A_i$ измеримо и $m(A) = \lim m(A_i)$. Если при любом i множество A_i измеримо и $A_i \supset A_{i+1}$, то множество $A = \bigcap_i A_i$ измеримо и $m(A) = \lim m(A_i)$ при условии, что $m(A_i) < \infty$ для некоторого i.*

Доказательство. В первом случае положим $B_1 = A_1$ и $B_i = A_i \setminus A_{i-1}$ для $i > 1$. Тогда $\{B_i\}$ — последовательность непересекающихся измеримых множеств, причем $A = \bigcup_i B_i$. Значит,

$$m(A) = \sum m(B_i) = \lim \sum_1^n m(B_i) = \lim m(A_n),$$

где предел может оказаться равным ∞.

Во втором случае мы можем предположить, что $m(A_1) \leq \infty$. Положим $B_i = A_1 \setminus A_i$ и $B = A_1 \setminus A$.

Тогда $B_i \subset B_{i+1}$ и $\bigcup_i B_i = B$. Значит, $m(A_1) - m(A) = m(B) = \lim m(B_i) = \lim(m(A_1) - m(A_i)) = m(A_1) - \lim m(A_i)$, и поэтому $m(A) = \lim m(A_i)$, причем оба выражения конечны. ■

Следующая теорема указывает, как функция множества m^* определяется своими значениями на открытых и замкнутых множествах.

Теорема 3.18. *Внешняя мера любого множества A выражается формулой*

$$m^*(A) = \inf \{m(G);\ A \subset G,\ G \text{ — открытое множество}\}.$$

Если A измеримо, то

$$m^*(A) = \sup \{m(F);\ A \supset F,\ F \text{ — ограниченное замкнутое множество}\}.$$

Обратно, если справедливо последнее равенство и $m^*(A) < \infty$, то A измеримо.

Доказательство. Первое утверждение очевидно, потому что объединение любой покрывающей последовательности открытых интервалов является открытым множеством, покрывающим A. Для доказательства второго обозначим через α произвольное действительное число, меньшее $m(A)$, и положим $A_i = A \cap (-i, i)$. По теореме 3.17, $m(A) = \lim m(A_i)$, и, значит, можно выбрать такое i, что $m(A_i) > \alpha$. В силу измеримости, A_i (будучи ограниченным) содержит такое замкнутое множество F, что $m(F) > \alpha$, причем F является также подмножеством множества A. Обратно, если $m^*(A) < \infty$ и F — такое замкнутое подмножество в A, что $m(F) > m^*(A) - \varepsilon/2$, то обозначим через G такое покрывающее A открытое множество, что $m(G) < m^*(A) + \varepsilon/2$. Тогда $F \subset A \subset G$ и $m(G \setminus F) < \varepsilon$, откуда следует, что A измеримо. ■

Заметим, что леммы 3.4—3.14 неявно вошли в теоремы 3.16 и 3.18.

Следующая теорема устанавливает инвариантность меры Лебега относительно параллельного переноса.

Теорема 3.19. *Если множество A можно получить из измеримого множества B параллельным переносом, то A измеримо и $m(A) = m(B)$.*

Это следует непосредственно из определений и из того, что объем интервала сохраняется при параллельном переносе. Измеримость и мера сохраняются также при вращении и при осевой симметрии r-мерного пространства, но мы не будем это доказывать.

Из определения измеримости и того факта, что любое открытое множество представляет собой объединение некоторой последовательности непересекающихся интервалов, следует, что любое множество конечной меры можно получить из некоторого конечного объединения непересекающихся интервалов, добавляя и вычитая два множества произвольно малой меры. Таким образом, множество конечной меры, так сказать, приближенно равно конечному объединению интервалов. Намного более глубоким является тот факт, что измеримое множество локально устроено по принципу «все или ничего»; почти во всех точках оно или сильно сгущено или сильно разрежено. Строго эта идея выражена в замечательной теореме, доказанной Лебегом, которой мы закончим эту главу. Мы рассмотрим лишь одномерный случай.

Говорят, что измеримое множество $E \subset R$ имеет *плотность* d в точке x, если предел

$$\lim_{h \to 0} \frac{m(E \cap [x-h, x+h])}{2h}$$

существует и равен d. Множество точек из R, в которых E имеет плотность 1, обозначим $\varphi(E)$. Тогда E имеет плотность 0 в каждой точке множества $\varphi(R \setminus E)$. В теореме Лебега утверждается, что $\varphi(E)$ измеримо и отличается от E на нуль-множество. Иначе говоря, E имеет плотность 1 почти во всех точках E и плотность 0 почти во всех точках $R \setminus E$. Невозможно, например, чтобы какое-нибудь множество и его дополнение оба имели в каждом интервале меру, равную половине длины этого интервала. (Такое множество было бы измеримым и имело бы всюду плотность $^1/_2$.)

Симметрическая разность двух множеств A и B — это множество точек, которые принадлежат хотя бы одному из этих множеств, но не принадлежат обоим сразу. Она обозначается так: $A \triangle B$. Таким образом, $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Теорема 3.20 (теорема Лебега о точках плотности). *Для любого измеримого множества $E \subset R$ имеем* $m(E \triangle \varphi(E)) = 0$.

Доказательство. Достаточно доказать, что $E \setminus \varphi(E)$ имеет меру нуль, так как $\varphi(E) \setminus E \subset \subset E' \setminus \varphi(E')$ и E' измеримо. Можно считать, что E ограничено. Далее, $E \setminus \varphi(E) = \bigcup\limits_{\varepsilon > 0} A_\varepsilon$, где

$$A_\varepsilon = \left\{ x \in E;\ \varliminf_{h \to 0} \frac{m(E \cap [x-h, x-h])}{2h} < 1 - \varepsilon \right\}^{1)}.$$

Таким образом, достаточно показать, что A_ε является нуль-множеством при любом $\varepsilon > 0$. Положив $A = A_\varepsilon$, мы придем к противоречию с предположением, что $m^*(A) > 0$.

Если $m^*(A) > 0$, то найдется ограниченное открытое множество G, содержащее A и такое, что $m(G) < < m^*(A)/(1-\varepsilon)$. Обозначим через $\mathscr{E}$ класс всех таких замкнутых интервалов I, что $I \subset G$ и $m(E \cap I) \leqslant \leqslant (1-\varepsilon)|I|$. Заметим, что (i) $\mathscr{E}$ содержит сколь угодно малые интервалы вокруг каждой точки из A и (ii) для любой последовательности $\{I_n\}$ непересекающихся элементов $\mathscr{E}$ справедливо неравенство $m^*\left(A \setminus \bigcup\limits_n I_n\right) > 0$. Свойство (ii) следует из того, что

$$m^*\left(A \cap \bigcup_n I_n\right) \leqslant \sum m(E \cap I_n) \leqslant$$
$$\leqslant (1-\varepsilon) \sum |I_n| \leqslant (1-\varepsilon)\, m(G) < m^*(A).$$

---

[1]) Можно считать, что ε, пробегая дискретную последовательность значений, стремится к нулю. Выражение $\varliminf\limits_{x \to x_0} f(x)$ означает нижний предел функции $f(x)$ в точке x_0, который определяется как нижняя грань пределов $\lim\limits_{x_k \to x_0} f(x)$ по всевозможным последовательностям $\{x_k\}$. — *Прим. перев.*

Построим по индукции последовательность I_n непересекающихся элементов из $\mathscr{E}$. В качестве I_1 возьмем произвольный отрезок из $\mathscr{E}$. Пусть отрезки $I_1, \ldots, I_n$ уже выбраны, и пусть $\mathscr{E}_n$ — множество элементов $\mathscr{E}$, не пересекающихся с $I_1, \ldots, I_n$. Из свойств (i) и (ii) вытекает, что $\mathscr{E}_n$ непусто. Обозначим через d_n верхнюю грань длин отрезков из $\mathscr{E}_n$ и выберем $I_{n+1} \in \mathscr{E}_n$ так, что $|I_{n+1}| > d_n/2$. Положим $B = A \setminus \bigcup_1^\infty I_n$. В силу (ii), имеем $m^*(B) > 0$. Значит, существует положительное целое N, такое, что

$$\text{(1)} \qquad \sum_{N+1}^{\infty} |I_n| < m^*(B)/3.$$

Для каждого $n > N$ через J_n обозначим концентрический с I_n интервал, такой, что $|J_n| = 3|I_n|$. Из неравенства (1) следует, что интервалы $J_n\,(n > N)$ не покрывают B, и, значит, найдется точка $x \in B \setminus \bigcup_{N+1}^\infty J_n$. Так как $x \in A \setminus \bigcup_1^N I_n$, то из (i) вытекает существование интервала $I \in \mathscr{E}_N$ с центром в x. Интервал I должен пересечься с некоторым интервалом I_n при $n > N$. (В противном случае $|I| \leqslant d_n < 2|I_{n+1}|$ для всех n, что противоречит неравенству $\sum_1^\infty |I_n| \leqslant m(G) < \infty$.) Пусть k — наименьшее целое число, при котором I пересекается с I_k. Тогда $k > N$ и $|I| \leqslant d_{k-1} < 2|I_k|$. Отсюда следует, что x — центр интервала I — принадлежит интервалу J_k, что противоречит условию $x \notin \bigcup_{N+1}^\infty J_n$. ■

Будем писать $A \sim B$, когда $m(A \triangle B) = 0$. Тем самым задается отношение эквивалентности в классе S измеримых множеств. Следующая теорема утверждает, что отображение φ: $S \to S$ можно рассматривать как функцию, которая выбирает по представителю из каждого класса эквивалентности. Более того, выбранные при этом множества образуют класс, замкнутый относительно пересечения и включающий пустое множество и все пространство.

Теорема 3.21. *Пусть для любого измеримого множества A через $\varphi(A)$ обозначено множество тех точек из R, в которых A имеет плотность 1. Тогда φ обладает следующими свойствами ($A \sim B$ означает, что $A \triangle B$ есть нуль-множество):*

1) $\varphi(A) \sim A$;
2) *из* $A \sim B$ *следует* $\varphi(A) = \varphi(B)$;
3) $\varphi(\varnothing) = \varnothing$ *и* $\varphi(R) = R$;
4) $\varphi(A \cap B) = \varphi(A) \cap \varphi(B)$;
5) *из* $A \subset B$ *следует* $\varphi(A) \subset \varphi(B)$.

Доказательство. Первое утверждение совпадает с теоремой Лебега о точках плотности. Второе и третье немедленно следуют из определения φ. Чтобы доказать 4), заметим, что для любого интервала I имеет место равенство $I \setminus (A \cap B) = (I \setminus A) \cup (I \setminus B)$. Значит, $m(I) - m(I \cap A \cap B) \leqslant m(I) - m(I \cap A) + m(I) - m(I \cap B)$. Следовательно,

$$\frac{m(I \cap A)}{|I|} + \frac{m(I \cap B)}{|I|} - 1 \leqslant \frac{m(I \cap A \cap B)}{|I|}.$$

Взяв $I = [x - h, x + h]$ и положив $h \to 0$, получим, что $\varphi(A) \cap \varphi(B) \subset \varphi(A \cap B)$. Обратное включение очевидно. Свойство 5) следует из 4). ■

ГЛАВА 4

СВОЙСТВО БЭРА

Симметрическая разность, определенная формулой

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A),$$

является коммутативной и ассоциативной операцией, удовлетворяющей следующему дистрибутивному закону: $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$. Очевидно, что $A \triangle B \subset A \cup B$ и $A \triangle A = \varnothing$. Легко проверить, что любой класс множеств, замкнутый относительно операций $\triangle$ и $\cap$, является коммутативным кольцом (в алгебраическом смысле), где эти операции выполняют роль соответственно сложения и умножения. Такой класс замкнут также относительно операций объединения и разности. Следовательно, он является кольцом подмножеств объединения своих элементов в смысле определения из гл. 3.

Будем говорить, что множество A евклидова r-мерного пространства (или любого топологического пространства) обладает *свойством Бэра*, если его можно представить в виде $A = G \triangle P$, где G — открытое множество, а P — множество первой категории.

Теорема 4.1. *Множество A обладает свойством Бэра тогда и только тогда, когда оно представимо в виде $A = F \triangle Q$, где F замкнуто, а Q — множество первой категории.*

Доказательство. Если $A = G \triangle P$, где G — открытое множество, а P — множество первой категории, то $N = \overline{G} \setminus G$ — нигде не плотное замкнутое множество, а $Q = N \triangle P$ — множество первой категории. Положим $F = \overline{G}$. Тогда $A = G \triangle P = (\overline{G} \triangle N) \triangle P = \overline{G} \triangle (N \triangle P) = F \triangle Q$. Обратно, если $A = F \triangle Q$, где F — замкнутое множество, а Q — множество первой категории, то пусть G — множество внутренних точек множества F[1]). Тогда $N = F \setminus G$ нигде не плотно, $P = N \triangle Q$ — множество первой категории и

$$A = F \triangle Q = (G \triangle N) \triangle Q = G \triangle (N \triangle Q) = G \triangle P. \quad \blacksquare$$

Теорема 4.2. *Если множество A обладает свойством Бэра, то им обладает и его дополнение.*

Доказательство. Для любых двух множеств A и B выполняется равенство $(A \triangle B)' = A' \triangle B$. Значит, если $A = G \triangle P$, то $A' = G' \triangle P$, и утверждение следует из теоремы 4.1. ■

Теорема 4.3. *Класс множеств, обладающих свойством Бэра, является σ-алгеброй. Она порождается открытыми множествами вместе с множествами первой категории.*

Доказательство. Пусть $A_i = G_i \triangle P_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ — произвольная последовательность множеств, обладающих свойством Бэра. Положим $G = \bigcup_i G_i$, $P = \bigcup_i P_i$ и $A = \bigcup_i A_i$. Тогда G открыто, P — множество первой категории и $G \setminus P \subset A \subset G \cup P$. Значит, $G \triangle A \subset P$ — множество первой категории и $A = G \triangle (G \triangle A)$ обладает свойством Бэра. Этот результат вместе с теоремой 4.2 и показывает, что рассматриваемый класс является σ-алгеброй. Кроме того, очевидно, что это минимальная σ-алгебра, включающая все открытые множества и все множества первой категории. ■

Теорема 4.4. *Множество обладает свойством Бэра тогда и только тогда, когда его можно представить в виде объединения G_δ-множества и множества первой категории (или разности F_σ-множества и множества первой категории).*

Доказательство. Так как замыкание любого нигде не плотного множества нигде не плотно, то любое множество первой категории содержится в некотором F_σ-множестве первой категории. Если G от-

[1] Такое множество G называют также открытым ядром множества F. — *Прим. перев.*

крыто, а P — множество первой категории, то через Q обозначим F_σ-множество первой категории, которое содержит P. Тогда $E = G \setminus Q$ будет G_δ-множеством и мы получим

$$G \triangle P = [(G \setminus Q) \triangle (G \cap Q)] \triangle (P \cap Q) = \\ = E \triangle [(G \triangle P) \cap Q].$$

Здесь $(G \triangle P) \cap Q$ — множество первой категории, которое не пересекается с E. Значит, любое множество, обладающее свойством Бэра, можно представить как объединение непересекающихся G_δ-множества и множества первой категории. Обратно, любое множество, которое можно представить в таком виде, принадлежит σ-алгебре, порожденной открытыми множествами и множествами первой категории; оно, таким образом, обладает свойством Бэра. Утверждение в скобках получается с учетом теоремы 4.2 путем перехода к дополнениям. ■

Регулярное открытое множество — это множество, совпадающее с множеством внутренних точек своего замыкания. Любое множество вида $A^{-\prime-\prime}$ является регулярным открытым.

Теорема 4.5. *Любое открытое множество H имеет вид $H = G \setminus \bar{N}$, где G — регулярное открытое множество, а N нигде не плотно.*

Доказательство. Пусть $G = H^{-\prime-\prime}$ и $N = G \setminus H$. Тогда G — регулярное открытое множество, N нигде не плотно и $H = G \setminus N$. Имеем $\bar{N} \subset \bar{G} \setminus H$. Значит, $G \setminus \bar{N} \supset G \setminus (\bar{G} \setminus H) = G \cap H = H$. Кроме того, $H = G \setminus N \supset G \setminus \bar{N}$. Таким образом, $H = G \setminus \bar{N}$. ■

Теорема 4.6. *Любое множество, обладающее свойством Бэра, можно представить в виде $A = G \triangle P$, где G регулярное открытое, а P первой категории. Это представление единственно в любом пространстве, в котором каждое непустое открытое множество является множеством второй категории (т. е. не первой категории).*

Доказательство. Существование такого представления следует из теоремы 4.5; в любом представлении можно заменить открытое множество множеством внутренних точек его замыкания. Для доказательства единственности предположим, что $G \triangle P = H \triangle Q$, где G — регулярное открытое множество, H открытое, а P и Q первой категории. Тогда $H \setminus \bar{G} \subset H \triangle G = P \triangle Q$. Значит, $H \setminus \bar{G}$ — открытое множество первой категории и поэтому пусто. Имеем $H \subset \bar{G}$ и, значит, $H \subset G^{-'-'} = G$. Таким образом, в том представлении, в которое входит регулярное открытое множество, это открытое множество G максимально. Если G и H — оба регулярные открытые, то каждое из них содержит другое. Значит, $G = H$ и $P = Q$. ■

Теорема 4.7. *Пересечение любых двух регулярных открытых множеств является регулярным открытым множеством.*

Доказательство. Пусть $G = G^{-'-'}$ и $H = H^{-'-'}$. Так как $G \cap H$ — открытое множество, то

$$G \cap H \subset (G \cap H)^{-'-'} \subset G^{-'-'} = G.$$

Подобным же образом

$$G \cap H \subset (G \cap H)^{-'-'} \subset H^{-'-'} = H.$$

Значит, $G \cap H = (G \cap H)^{-'-'}$. ■

Все предыдущие определения и теоремы применимы к пространству любой размерности (фактически доказательства проходят для любого топологического пространства). Из сравнения теорем 4.3 и 3.16 видно, что класс множеств, обладающих свойством Бэра, аналогичен классу измеримых множеств, при этом множества первой категории играют роль нуль-множеств. Надо заметить, однако, что в теоремах 4.4 и 3.15 роли F_σ- и G_δ-множеств поменялись местами. Более того, теорема 4.1 не имеет аналога для измеримых множеств; самое большее, что можно сказать, это то, что измеримое множество отличается от некоторого открытого (или замкнутого) множества на множество сколь угодно малой меры. Однако оба класса содержат борелевские множества и каждый инвариантен относительно сдвига. Продолжая аналогию, можно установить следующую теорему, в которой $x+A$ означает множество A, сдвинутое на x. Для простоты мы ограничимся одномерным случаем.

Теорема 4.8. *Для любого линейного множества A второй категории, обладающего свойством Бэра, и для любого измеримого множества A положительной меры найдется положительное число δ, такое, что $(x+A)\cap A\neq\varnothing$, как только $|x|<\delta$.*

Доказательство. В первом случае пусть $A = G\,\triangle\,P$. Так как G не пусто, оно содержит интервал I. Для любых x верно включение

$$(x+A)\cap A\supset[(x+I)\cap I]\setminus[P\cup(x+P)].$$

Если $|x|<|I|$, то множество в правой части представляет собой интервал минус множество первой категории. Значит, оно не пусто. Таким образом, можно взять $\delta=|I|$.

Во втором случае пусть F — ограниченное замкнутое подмножество в A, такое, что $m(F)>0$ (теорема 3.18). Покроем F ограниченным открытым множеством G, для которого $m(G)<(4/3)m(F)$; G является объединением последовательности попарно не пересекающихся интервалов. По крайней мере для одного из них — пусть это будет интервал I — должно выполняться неравенство $m(F\cap I)>(3/4)m(I)$. Возьмем $\delta=m(I)/2$. Если $|x|<\delta$, то $(x+I)\cup I$ — интервал длины меньше $(3/2)m(I)$, который содержит как $F\cap I$, так и $x+(F\cap I)$. Эти множества не могут не пересекаться, так как $m(x+(F\cap I))=m(F\cap I)>(3/4)m(I)$. Поскольку $(x+A)\cap A\subset[x+(F\cap I)]\cap(F\cap I)$, множество слева не пусто. ■

ГЛАВА 5

НЕИЗМЕРИМЫЕ МНОЖЕСТВА

До сих пор у нас не было никаких указаний на то, что класс измеримых множеств или класс множеств, обладающих свойством Бэра, включает не все подмножества действительной прямой. Мы знаем, что любое множество, полученное из элементов некоторого счетного семейства открытых, замкнутых или нуль-множеств путем применения счетного числа операций объединения, пересечения или взятия дополнения, измеримо. Можно также показать, что любое аналитическое множество измеримо (*аналитическое множество* — это множество, которое можно представить как непрерывный образ некоторого борелевского множества). Согласно одному результату Гёделя [12, стр. 490], гипотеза о существовании неизмеримого множества, которое представимо в виде непрерывного образа дополнения некоторого аналитического множества, не противоречит аксиомам теории множеств, если только сами эти аксиомы образуют непротиворечивую систему. Не известно ни одного конкретного примера неизмеримого множества, допускающего такое представление (см., однако, [32, стр. 30]). Тем не менее, если использовать аксиому выбора, то легко показать, что неизмеримые множества существуют. Рассмотрим несколько таких конструкций.

Наиболее ранняя и простейшая конструкция принадлежит Витали (1905 г.) [12, стр. 96]. Пусть Q — множество рациональных чисел, рассматриваемое как подгруппа группы действительных чисел по сложению. Смежные классы по подгруппе Q [1]) образуют разбиение прямой на несчетное семейство непересекающихся множеств, каждое из которых получается из Q в результате сдвига. По аксиоме выбора суще-

[1]) То есть множества вида $a+Q$, где a — любое действительное число. — *Прим. перев.*

ствует множество V, имеющее с каждым из этих смежных классов ровно по одному общему элементу. Любое такое множество назовем *множеством Витали*. Счетное семейство множеств вида $r+V$ ($r \in Q$) покрывает всю прямую. Из теоремы 3.19 видно, что V не может быть нуль-множеством. По теореме 4.8, если V измеримо, то найдется число $\delta > 0$, такое, что $(x+V) \cap V \neq \varnothing$, как только $|x| < \delta$. Но если x рационально и $x \neq 0$, то $(x+V) \cap V = \varnothing$; получаем противоречие. Следовательно, V не может быть измеримым.

Точно так же доказывается, что ни одно из множеств Витали V не обладает свойством Бэра. Оно не может быть множеством первой категории, так как множества $r+V$ ($r \in Q$) покрывают всю прямую. Поэтому, как и выше, из теоремы 4.8 следует, что V не может обладать свойством Бэра.

Пусть $V = A \cup B$ — разбиение множества Витали V на множество A первой категории и множество B меры нуль (следствие 1.7). Тогда A неизмеримо, но обладает свойством Бэра, в то время как B измеримо, но не обладает свойством Бэра. Таким образом, ни один из этих двух классов не включает в себя другой.

Совсем другая конструкция, приводящая к неизмеримому множеству, принадлежит Ф. Бернштейну (1908) [12, стр. 524]. Она опирается на возможность ввести полное упорядочение в множестве мощности континуум. Прежде всего нам понадобится следующая

Лемма 5.1. *Любое несчетное G_δ-множество на прямой R содержит нигде не плотное замкнутое множество C меры нуль, которое можно непрерывно отобразить на* $[0, 1]$.

Доказательство. Пусть $E = \bigcap_n G_n$, где G_n открыты, есть несчетное G_δ-множество. Пусть F обозначает множество всех точек конденсации множества E, принадлежащих E, т. е. всех точек $x \in E$, таких, что любая окрестность x содержит несчетное множество точек из E. Множество F не пусто; в противном случае семейство интервалов с рациональными концами, содержащих лишь счетное множество точек из E, покрывало бы E и E было бы счетным. Подобное же рассуждение показывает, что F не имеет изолированных точек. Пусть $I(0)$ и $I(1)$ — два непересекающихся отрезка длины не более 1/3, содержащихся в G_1 и содержащих внутри себя точки из F. Далее рассуждаем по индукции. Пусть уже определены 2^n непересекающихся отрезков $I(i_1, \ldots, i_n)$ $(i_k = 0$ или $1)$ длины не более $1/3^n$, объединение которых содержится в G_n и у которых множество внутренних точек пересекается с F; обозначим через $I(i_1, \ldots, i_{n+1})$ $(i_{n+1} = 0$ или $1)$ непересекающиеся отрезки длины, не превосходящей $1/3^{n+1}$, содержащиеся в $G_{n+1} \cap I(i_1, \ldots, i_n)$ и содержащие внутри себя точки из F. Поскольку F не имеет изолированных точек и $E \subset G_{n+1}$, ясно, что такие отрезки существуют. Таким образом, семейство отрезков $I(i_1, \ldots, i_n)$ с указанными свойствами действительно можно определить. Положим

$$C = \bigcap_n \bigcup_{i_1, \ldots, i_n} I(i_1, \ldots, i_n).$$

Тогда C — замкнутое нигде не плотное подмножество множества E. Мера C равна нулю по той же причине, что и мера канторова множества (и на самом деле C гомеоморфно канторову множеству). Для каждого x из C найдется единственная последовательность $\{i_n\}$, $i_n = 0$ или 1, такая, что $x \in I(i_1, \ldots, i_n)$ при любом n, и обратно, каждая такая последовательность соответствует некоторой точке из C. Пусть $f(x)$ — действительное число с двоичным разложением $0, i_1 i_2 i_3 \ldots$. Тогда f отображает C на $[0, 1]$. Значит, C имеет мощность c. Отображение f непрерывно, так как $|f(x) - f(x')| \leqslant 1/2^n$, когда точки x и x' обе принадлежат множеству $C \cap I(i_1, \ldots, i_n)$. ■

Лемма 5.2. *Класс несчетных замкнутых подмножеств действительной прямой R имеет мощность c.*

Доказательство. Класс открытых интервалов с рациональными концами счетен, а каждое открытое множество есть объединение некоторого подкласса. Следовательно[1]), имеется не более c открытых множеств, а значит (если перейти к дополнениям), не более c замкнутых множеств. С другой стороны, имеется по крайней мере c несчетных замкнутых множеств, ибо такова мощность множества всех замкнутых интервалов. Итак, на прямой имеется ровно c несчетных замкнутых множеств. ■

Теорема 5.3 (Ф. Бернштейн). *Существует множество B действительных чисел, такое, что B и B' оба пересекаются с каждым несчетным замкнутым множеством на прямой.*

В силу принципа полной упорядоченности и леммы 5.2 класс $\mathscr{F}$ несчетных замкнутых множеств на прямой можно снабдить индексами в виде порядковых чисел[2]), меньших ω_c, где ω_c — первое порядковое число, которому предшествует множество порядковых чисел мощности c; таким образом, можно записать $\mathscr{F} = \{F_\alpha;\ \alpha < \omega_c\}$. Можно также предположить, что прямая R и, значит, каждый член из класса $\mathscr{F}$ вполне упорядочены. Заметим, что каждый элемент из $\mathscr{F}$ имеет мощность c в силу леммы 5.1, так как всякое замкнутое множество является G_δ-множеством. Пусть p_1 и q_1 — первые два элемента из F_1. Пусть, далее, p_2 и q_2 — первые два элемента из F_2, отличные от p_1 и q_1. Если $1 < \alpha < \omega_c$ и если p_β и q_β уже определены для всех $\beta < \alpha$, то пусть p_α и q_α — первые два элемента из $F_\alpha \setminus \bigcup_{\beta<\alpha} \{p_\beta, q_\beta\}$. Это множество не пусто (оно имеет мощность c) при любом α, и поэтому p_α и p_β определены для всех $\alpha < \omega_c$. Положим $B = \{p_\alpha;\ \alpha < \omega_c\}$. Так как $p_\alpha \in B \cap F_\alpha$ и $q_\alpha \in B' \cap F_\alpha$ для любого $\alpha < \omega_c$, то B обладает тем свойством, что оно, как и его дополнение, пересекается с каждым

---

[1]) Здесь используется тот факт, что множество всех подмножеств счетного множества имеет мощность c. — *Прим. перев.*

[2]) О порядковых числах см., например, Натансон И. П., Теория функций вещественной переменной, М., 1957, стр. 410. — *Прим. перев.*

несчетным замкнутым множеством. Будем называть любое множество с таким свойством *множеством Бернштейна.*

Теорема 5.4. *Любое множество Бернштейна B неизмеримо и не обладает свойством Бэра. Более того, каждое измеримое подмножество как B, так и B' является нуль-множеством и любое подмножество B или B', обладающее свойством Бэра, есть множество первой категории.*

Доказательство. Пусть A — какое-нибудь измеримое подмножество множества B. Любое замкнутое множество F, содержащееся в A, должно быть не более чем счетным (так как каждое несчетное замкнутое множество пересекается с B'), следовательно, $m(F)=0$. Значит, по теореме 3.18, $m(A)=0$. Подобным же образом, если A — подмножество B, обладающее свойством Бэра, то $A=E\cup P$, где E является G_δ-множеством, а P — множеством первой категории. Множество E должно быть счетным, так как каждое несчетное G_δ-множество в силу леммы 5.1 содержит несчетное замкнутое множество и, значит, пересекается с B'. Следовательно, A — множество первой категории. То же рассуждение применимо к B'. ∎

Теорема 5.5. *Любое множество положительной внешней меры содержит неизмеримое подмножество. Любое множество второй категории содержит подмножество, не обладающее свойством Бэра.*

Доказательство. Если A имеет положительную внешнюю меру, а B — множество Бернштейна, то, по теореме 5.4, подмножества $A\cap B$ и $A\cap B'$ не могут одновременно быть измеримыми. Если A — множество второй категории, то эти же два подмножества не могут одновременно обладать свойством Бэра. ∎

Тот факт, что каждое множество положительной внешней меры имеет неизмеримое подмножество, первым доказал Радемахер [24], используя совсем другой метод.

Неизмеримость множества Витали связана с теоретико-групповыми свойствами меры Лебега (инвариантность относительно сдвига), а неизмеримость множества Бернштейна — с топологическими свойствами (теорема 3.18). Однако есть и более глубокие причины, чисто теоретико-множественной природы, по которым (при определенных предположениях) невозможно определить нетривиальную меру для всех подмножеств множества X. В этом состоит известная теорема Улама (1930 г.) [31]. В этой теореме речь идет не непосредственно о мерах на прямой, а о мерах в абстрактном множестве X ограниченной мощности. В простейшем случае она касается мер в множестве мощности $\aleph_1$. Сказать, что X имеет мощность $\aleph_1$, — это значит утверждать, что X можно вполне упорядочить так, чтобы при этом каждому элементу предшествовало только счетное множество элементов, т. е. элементы X можно привести во взаимно однозначное соответствие с порядковыми числами, меньшими первого несчетного порядкового числа.

Теорема 5.6 (Улам). *Конечная мера* μ, *определенная на всех подмножествах множества* X *мощности* $\aleph_1$, *равна нулю тождественно, если она равна нулю для каждого подмножества, состоящего из одного элемента.*

Доказательство. По предположению, X можно вполне упорядочить так, чтобы для каждого y из X множество $\{x; x < y\}$ было счетным. Пусть $f(x, y)$ — взаимно однозначное отображение этого множества на подмножество положительных целых чисел. Тогда f — целочисленная функция, определенная для всех пар (x, y) элементов из X, для которых $x < y$. Она обладает таким свойством:

(1) если $x < x' < y$, то $f(x, y) \neq f(x', y)$.

Для каждого $x \in X$ и каждого целого положительного n положим, по определению,

$$F_x^n = \{y;\ x < y,\ f(x, y) = n\}.$$

Эти множества можно расположить в виде таблицы

$$\begin{array}{lllll} F^1_{x_1} & F^1_{x_2} & \ldots & F^1_x & \ldots \\ F^2_{x_1} & F^2_{x_2} & \ldots & F^2_x & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ F^n_{x_1} & F^n_{x_2} & \ldots & F^n_x & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

имеющей $\aleph_0$ строк и $\aleph_1$ столбцов. Эта таблица обладает следующими свойствами:

(2) множества каждой строки попарно не пересекаются;

(3) объединение множеств каждого столбца равно всему X минус некоторое счетное множество.

Для проверки свойства (2) предположим, что $y \in F^n_x \cap F^n_{x'}$ при некотором n и некоторых y, x и x', $x \leqslant x'$. Тогда $x < y$, $x' < y$ и $f(x, y) = f(x', y) = n$. Значит, $x = x'$ в силу (1). Таким образом, при любом фиксированном n множества F^n_x $(x \in X)$ не пересекаются.

Чтобы установить (3), заметим, что если $x < y$, то y принадлежит одному из множеств F^n_x, а именно тому, для которого $n = f(x, y)$. Значит, объединение множеств F^n_x $(n = 1, 2, \ldots)$ отличается от X на счетное множество $\{y;\, y \leqslant x\}$.

В силу (2) в каждой строке может быть не более чем счетное множество множеств, для которых $\mu(F^n_x) > 0$ (так как $\mu(X)$ конечна). Значит, и во всей таблице множество таких множеств не более чем счетно. Но так как множество столбцов несчетно, то найдется элемент x из X, такой, что $\mu(F^n_x) = 0$ для всех n. Объединение множеств этого столбца имеет меру нуль, и дополнительное счетное множество также имеет меру нуль. Итак, $\mu(X) = 0$ и, значит, μ тождественно равна нулю. ■

Улам установил этот результат не только для множеств X мощности $\aleph_1$, но и для некоторых множеств большей мощности. Предельное кардинальное число[1]) называется *слабо недостижимым*, если (i) оно больше чем $\aleph_0$, и (ii) его нельзя представить в виде суммы, в которой число слагаемых и каждое слагаемое меньше этого кардинального числа. Оно называется *недостижимым*, если к тому же (iii) оно превосходит число подмножеств любого множества меньшей мощности. Легко заметить, что c не является недостижимым ((iii) не выполняется). Если недостижимые кардинальные числа существуют, то даже наименьшее из них должно быть чрезвычайно большим. Продолжая приведенные выше рассуждения, Улам показал, что в теореме 5.6 достаточно предполагать, что ни одно кардинальное число, меньшее или равное мощности X, не является слабо недостижимым. Ни теорема 5.6, ни это ее обобщение не применимы к мере на прямой, пока мы не сделаем некоторых предположений относительно c. Если предположить, что справедлива *гипотеза континуума* (которая утверждает, что $c = \aleph_1$), или по крайней мере предположить, что никакое кардинальное число, меньшее или равное c, не является слабо недостижимым, то можно вывести следующее

Предложение 5.7. *Конечная мера, определенная на всех подмножествах множества мощности c, равна нулю тождественно, если она равна нулю для каждого одноточечного подмножества.*

Это утверждение приводит к одному замечательному обобщению. В дополнение к упомянутым выше результатам Улам показал, что если множество X допускает конечную меру μ, такую, что $\mu(X) > 0$ и $\mu(\{x\}) = 0$ для каждого $x \in X$, и если утверждение 5.7 справедливо, то X допускает *двузначную* меру (т. е. принимающую лишь два значения 0 и 1) с теми же свойствами. В соответствии с теоремой Ханфа и Тарского [36, стр. 313] такая мера возможна только в

---

[1]) Предельным кардинальным числом называют число вида $\aleph_\alpha$, где α — предельное порядковое число. О кардинальных числах см., например, Александров П. С. Введение в общую теорию множеств и функций, М. — Л., 1948. — *Прим. перев.*

случае, если мощность X равна чрезвычайно большому кардинальному числу, а именно, ему должно предшествовать равное ему число недостижимых кардинальных чисел!

Следует отметить, что неизмеримость множества не означает, что ему нельзя приписать никакой меры. На самом деле можно показать, что любое подмножество из R входит в область определения некоторого расширения меры Лебега. Однако, как показывает теорема 5.6, если $c = \aleph_1$, то никакое расширение меры Лебега не может быть определено одновременно для каждого элемента таблицы $\{F_x^n\}$. Более того, Банах [1] показал, что из гипотезы континуума вытекает существование *счетного* семейства множеств с тем же свойством. Но не следует при этом забывать, что без гипотезы континуума или какой-нибудь другой гипотезы относительно c ни утверждение 5.7, ни невозможность расширения меры Лебега на все подмножества из R до сих пор не доказаны.

ГЛАВА 6

ИГРА БАНАХА — МАЗУРА

Приблизительно в 1928 г. польский математик С. Мазур придумал такую математическую «игру». Игроку (A) «выдается» произвольное подмножество A замкнутого интервала I_0. Дополнительное множество $B = I_0 \setminus A$ получает игрок (B). Правила игры $\langle A, B \rangle$ таковы: (A) выбирает произвольно отрезок $I_1 \subset I_0$; затем (B) выбирает отрезок $I_2 \subset I_1$; затем (A) выбирает отрезок $I_3 \subset I_2$ и т. д. поочередно. Таким образом, игроки совместно определяют последовательность вложенных отрезков I_n, причем (A) выбирает отрезки с нечетными индексами, а (B) — с четными. Если множество $\bigcap_n I_n$ имеет хотя бы одну общую точку с A, то выигрывает (A); в противном случае выигрывает (B).

Возникает вопрос: может ли один из игроков, разумно выбирая отрезки, обеспечить себе победу независимо от того, как играет его противник? Каждый, кто знаком с доказательством теоремы Бэра о категории, конечно, заметит, что в случае, когда A — множество первой категории, для игрока (B) имеется простая стратегия, придерживаясь которой, он наверняка победит. Если $A = \bigcup_n A_n$, A_n нигде не плотны, то (B) должен при любом n выбрать $I_{2n} \subset I_{2n-1} \setminus A_n$, и тогда он выиграет независимо от того, как играет (A). Мазур высказал предположение, что второй игрок наверняка сможет выиграть *только* в том случае, когда A — множество первой категории. Банах доказал (но не опубликовал) справедливость этого предположения [32, стр. 37], [40].

Чтобы сказать точно, что понимается под словами «один из игроков наверняка сможет выиграть», нам следует уточнить понятие «стратегии». Стратегия для каждого из игроков — это правило, указывающее, какой ход он должен сделать в любой возможной ситуации. В момент n-го хода (B) знает, какие интервалы $I_0, I_1, \ldots, I_{2n-1}$ были выбраны на предыдущих ходах; кроме того, ему известны множества A и B — вот и все, что он знает. На основе этой информации его стратегия должна указать ему, какой интервал выбрать в качестве I_{2n}. Таким образом, стратегия для (B) — это последовательность функций $f_n(I_0, I_1, \ldots$ $\ldots, I_{2n-1})$, значениями которых являются отрезки. Правила игры требуют, чтобы

$$(1) \quad f_n(I_0, I_1, \ldots, I_{2n-1}) \subset I_{2n-1} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Функция f_n должна быть определена по крайней мере для всех отрезков, удовлетворяющих условиям

$$(2) \qquad I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_{2n-1}$$

и

$$(3) \quad I_{2i} = f_i(I_0, I_1, \ldots, I_{2i-1}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Для того чтобы это была выигрышная стратегия для (B), необходимо и достаточно, чтобы $\bigcap\limits_n I_n \subset B$ для любой последовательности I_n, удовлетворяющей (2) и (3) при всех n.

Теорема 6.1. *Для (B) существует выигрышная стратегия тогда и только тогда, когда A — множество первой категории.*

Доказательство. Пусть $f_1, f_2, \ldots$ — выигрышная стратегия для (B). Пусть I° — множество внутренних точек отрезка I. Для данной f_1 можно определить последовательность отрезков J_i $(i = 1, 2, \ldots)$, содержащихся в $\overset{\circ}{I}_1$ и таких, что (i) отрезки $K_i = f_1(I_0, J_i)$ не пересекаются и (ii) объединение множеств их внутренних точек плотно в I_0. Этого можно добиться, например, так. Пусть S — последовательность всех отрезков с рациональными концами, содержащихся в $\overset{\circ}{I}_0$. Пусть J_1 — первый член в S. Если уже определены $J_1, \ldots, J_i$, то в качестве J_{i+1} возьмем первый член последовательности S, который содержится в $I_0 \setminus K_1 \setminus K_2 \setminus \ldots \setminus K_i$. Используя (1), легко проверить, что эта конструкция индуктивно определяет последовательность J_i, обладающую требуемыми свойствами.

Подобным же образом для каждого i обозначим через J_{ij} ($j = 1, 2, \ldots$) последовательность отрезков, содержащихся в $\mathring{K}_i$ и таких, что отрезки $K_{ij} = f_2(I_0, J_i, K_i, J_{ij})$ не пересекаются и объединение множеств их внутренних точек плотно в K_i. Тогда объединение всех интервалов $\mathring{K}_{ij}$ плотно в I_0.

Продолжая процесс по индукции, мы определим два семейства отрезков $J_{i_1 \ldots i_n}$ и $K_{i_1 \ldots i_n}$, где n и каждый из индексов i_k пробегают всевозможные положительные целочисленные значения так, что при этом выполняются следующие условия:

(4) $$K_{i_1 \ldots i_n} = f_n(I_0, J_{i_1}, K_{i_1}, J_{i_1 i_2}, K_{i_1 i_2}, \ldots, J_{i_1 \ldots i_n}),$$

(5) $$J_{i_1 \ldots i_{n+1}} \subset \mathring{K}_{i_1 \ldots i_n}.$$

(6) При каждом n отрезки $K_{i_1 \ldots i_n}$ не пересекаются и объединение множеств их внутренних точек плотно в I_0.

Рассмотрим теперь произвольную последовательность положительных целых чисел i_n и положим по определению

(7) $$I_{2n-1} = J_{i_1 \ldots i_n}, \quad I_{2n} = K_{i_1 \ldots i_n} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Из (4) и (5) следует, что условия (2) и (3) выполняются для всех n; значит, последовательность вложенных отрезков I_n может получиться в результате игры, в которой (B) применял данную стратегию. По предположению множество $\bigcap_n I_n$ должно содержаться в B.

Для любого n положим $G_n = \bigcup_{i_1, \ldots, i_n} \mathring{K}_{i_1, \ldots, i_n}$.

Пусть $E = \bigcap_n G_n$. Тогда для любого x из E существует единственная последовательность $i_1, i_2, \ldots,$

такая, что $x \in K_{i_1 \dots i_n}$ при каждом n. Если эту последовательность использовать для определения последовательности (7), то $x \in \bigcap_n I_n \subset B$. Отсюда видно, что $E \subset B$. Следовательно,

$$A = I_0 \setminus B \subset I_0 \setminus E = \bigcup_n (I_0 \setminus G_n).$$

Из (6) вытекает, что каждое из множеств $I_0 \setminus G_n$ нигде не плотно; поэтому A должно быть первой категории. ■

Эта теорема дает еще одно толкование, в каком смысле мало множество первой категории; это множество, с которым даже самый блестящий игрок обречен на поражение, если только его противник не упустит возможности воспользоваться своим преимуществом.

Теорема 6.2. *Выигрышная стратегия для* (A) *существует тогда и только тогда, когда для некоторого отрезка* $I_1 \subset I_0$ *множество* $I_1 \cap B$ *является множеством первой категории.*

Доказательство. Если такой отрезок существует, то (A) может начать, выбрав его в качестве I_1. Затем с помощью очевидной стратегии он может обеспечить, чтобы $\bigcap_n I_n$ не пересекалось с B. Так как пересечение непусто, то это выигрышная стратегия для (A). С другой стороны, если у (A) есть выигрышная стратегия, он всегда может ее так усовершенствовать, чтобы пересечение интервалов I_n состояло только из одной точки множества A. (Например, этого можно добиться, если всегда выбирать I_{2n+1} так, как будто I_{2n} — отрезок вдвое меньшей длины.) Этим определяется выигрышная стратегия для второго игрока в игре $\langle I_1 \cap B, I_1 \cap A \rangle$. По теореме 6.1 такая стратегия может существовать только тогда, когда $I_1 \cap B$ является множеством первой категории. ■

Теорема 6.3. *Если множество* A *обладает свойством Бэра, то выигрышная стратегия существует* *либо для* (B), *либо для* (A) *в соответствии с тем, является ли* A *множеством первой или второй категории.*

Доказательство. Пусть $A = G \triangle P$, где G — открытое множество, а P — множество первой категории. Если G пусто, то у (B) есть выигрышная стратегия в соответствии с теоремой 6.1. Если G не пусто, то (A) нужно лишь выбрать $I_1 \subset G$, чтобы обеспечить себе выигрыш. ∎

Говорят, что множество E *имеет первую категорию в точке* x, если найдется такая окрестность U этой точки, что $U \cap E$ — множество первой категории. В противном случае говорят, что E *имеет вторую категорию в точке* x. Эти понятия аналогичны метрическому понятию плотности, рассмотренному в гл. 3. Множество G тех точек, в которых A имеет первую категорию, является открытым. Если A обладает свойством Бэра, то G можно рассматривать как аналог множества $\varphi(A)$, рассмотренного в теореме 3.21; это наибольшее открытое множество, которое отличается от A на множество первой категории. Следовательно, множество G — это то самое регулярное открытое множество, о котором шла речь в теореме 4.6. Тот факт, что G отличается от A на множество первой категории, аналогичен теореме Лебега о точках плотности.

В силу теорем 6.1 и 6.2 для одного из игроков существует выигрышная стратегия тогда и только тогда, когда A — множество первой категории или B имеет первую категорию в некоторой точке. По теореме 6.3, одна из этих альтернатив имеет место, когда A обладает свойством Бэра. Возможно ли, чтобы ни одна из альтернатив не выполнялась? Да! Возьмем в качестве A пересечение I_0 с множеством Бернштейна. Тогда ни A, ни B не содержат несчетного G_δ-множества (лемма 5.1). Следовательно, для любого отрезка $I \subset I_0$ ни одно из множеств $A \cap I$ или $B \cap I$ не будет множеством первой категории. (В самом деле, если одно из них первой категории, то другое имеет вторую категорию и обладает свойством Бэра. По теореме 4.4, любое такое множество содержит несчетное G_δ-множество.) Следовательно, в этом случае игра $\langle A, B \rangle$ не предопределена в пользу одного из игроков.

Возможность неопределенности делает игру Банаха — Мазура особенно интересной с точки зрения общей теории игр. Кроме того, она ставит ряд интересных вопросов. Если игра предопределена в пользу одного из игроков, следует ли ее в этом случае считать игрой, связанной с «умением»? Если ни один из игроков не может контролировать исход, является ли результат делом «случая»? И что означает «случай» в этой ситуации?

Есть другой вариант игры Банаха — Мазура, в котором игроки поочередно задают цифровые наборы (произвольной конечной длины), которые записываются последовательно один за другим и определяют в результате десятичное (или двоичное) разложение некоторого числа. Если это число принадлежит A, то выигрывает (A); в противном случае выигрывает (B). По существу это та же игра с отрезками с той лишь разницей, что отрезки здесь десятичные. Любую выигрышную стратегию для первоначальной игры легко приспособить к этому новому требованию, и теоремы 6.1, 6.2 и 6.3 остаются справедливыми. Однако если потребовать, чтобы все цифровые наборы, которые задают игроки, были длины 1, т. е. чтобы (A) и (B) поочередно выбирали по одному последовательному разряду в десятичном разложении числа, то получится совсем другая игра, которую впервые изучали Гейл и Стюарт (см. [39]). Условия, при которых в этом случае один из игроков имеет выигрышную стратегию, еще не вполне выяснены. Например, неизвестно, предопределена ли игра в пользу одного из игроков, если A — борелевское множество. Недавние результаты наводят на мысль, что ответ может зависеть от принятия тех или иных теоретико-множественных аксиом [16, стр. 75].

ГЛАВА 7

ФУНКЦИИ ПЕРВОГО КЛАССА

Пусть f — действительная функция, определенная на R. Для любого интервала I величину

$$\omega(I) = \sup_{x \in I} f(x) - \inf_{x \in I} f(x)$$

назовем *колебанием* f *на* I. Для каждого фиксированного x функция $\omega((x-\delta, x+\delta))$ монотонно не возрастает при убывании δ и стремится к пределу

$$\omega(x) = \lim_{\delta \to 0} \omega((x-\delta,\ x+\delta)),$$

который назовем *колебанием* f *в точке* x. Функция $\omega(x)$ определена на R и принимает значения из расширенной действительной оси. Очевидно, что $\omega(x_0)=0$ тогда и только тогда, когда f непрерывна в точке x_0. В противном случае $\omega(x_0)$ измеряет величину разрыва f в x_0.

Если $\omega(x_0) < \varepsilon$, то $\omega(x) < \varepsilon$ для всех x в некоторой окрестности точки x_0. Значит, множество $\{x;\ \omega(x) < \varepsilon\}$ является открытым. Множество D всех точек разрыва функции f можно представить в виде

$$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x;\ \omega(x) \geqslant 1/n\};$$

значит, D всегда представляет собой F_σ-множество. Таким образом, справедлива

Теорема 7.1. *Если f — некоторая действительная функция, определенная на R, то множество точек разрыва этой функции представляет собой F_σ-множество.*

Эта теорема допускает следующее обращение:

Теорема 7.2. *Для любого F_σ-множества E существует ограниченная функция f, у которой множество точек разрыва совпадает с E,* Доказательство. Пусть $E = \bigcup_n F_n$, где F_n — замкнутые множества. Можно считать, что $F_n \subset F_{n+1}$ при всех n. Пусть A_n — множество рациональных точек, принадлежащих F_n. Для любого множества A определим функцию

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad x \in A, \\ 0 & \text{при} \quad x \notin A, \end{cases}$$

называемую *характеристической* (или *индикаторной*) *функцией* множества A. Функция $f_n = \chi_{F_n} - \chi_{A_n} = \chi_{F_n \setminus A_n}$ имеет колебание 1 в каждой точке множества F_n и колебание 0 в остальных точках. Пусть $\{a_n\}$ — такая последовательность положительных чисел, что при любом n выполняется неравенство $a_n > \sum_{i>n} a_i$ (пусть, например, $a_n = 1/n!$). Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x)$ равномерно сходится на R к ограниченной функции f. Функция f непрерывна в каждой точке, в которой непрерывны все члены ряда, т. е. в каждой точке множества $R \setminus E$. С другой стороны, в каждой точке множества $F_n \setminus F_{n-1}$ колебание функции f не меньше величины $a_n - \sum_{i>n} a_i$. Следовательно, множество точек разрыва функции f в точности равно E. ∎

Функция f называется функцией *первого класса* (Бэра), если ее можно представить в виде предела всюду сходящейся последовательности непрерывных функций. Как показывают простые примеры, такая функция не обязательно непрерывна. Так, функции $f_n(x) = \max(0, 1 - n|x|)$ непрерывны и сходятся в каждой точке к разрывной функции $f(x)$, равной 1 при $x = 0$ и равной 0 при $x \neq 0$. Однако, как показывает следующая теорема, функция первого класса не может быть разрывной всюду. Эта теорема известна как *теорема Бэра о функциях первого класса* (точнее, это часть теоремы Бэра). Именно здесь Бэр впервые ввел понятие категории.

Теорема 7.3. *Если f представима в виде предела всюду сходящейся последовательности непрерывных функций, то f непрерывна всюду, кроме множества точек первой категории.*

Для сравнения вспомним известную теорему о том, что предел *равномерно* сходящейся последовательности непрерывных функций является всюду непрерывной функцией.

Доказательство. Достаточно показать, что для любого $\varepsilon > 0$ множество $F = \{x;\ \omega(x) \geqslant 5\varepsilon\}$ нигде не плотно. Пусть $f(x) = \lim f_n(x)$, f_n непрерывны, и пусть

$$E_n = \bigcap_{i,\ j \geqslant n} \{x;\ |f_i(x) - f_j(x)| \leqslant \varepsilon\} \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots).$$

Тогда E_n — замкнутое множество, $E_n \subset E_{n+1}$ и $\bigcup\limits_n E_n$ совпадает со всей прямой. Рассмотрим любой отрезок I. Так как $I = \bigcup\limits_n (E_n \cap I)$, то множества $E_n \cap I$ не могут быть все нигде не плотными. Значит, для какого-то целого $n > 0$ множество $E_n \cap I$ содержит открытый интервал J. Тогда $|f_i(x) - f_j(x)| \leqslant \varepsilon$ при всех x из J; $i, j \geqslant n$. Полагая $j = n$ и $i \to \infty$, получаем, что $|f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon$ при всех x из J. Для любого x_0 из J найдется окрестность $I(x_0) \subset J$, такая, что $|f_n(x) - f_n(x_0)| \leqslant \varepsilon$ при всех x из $I(x_0)$. Значит, $|f(x) - f_n(x_0)| \leqslant 2\varepsilon$ при всех x из $I(x_0)$. Следовательно, $\omega(x_0) \leqslant 4\varepsilon$ и ни одна точка из J не принадлежит F. Таким образом, для любого отрезка I существует открытый интервал $J \subset I \setminus F$. Это и означает, что F нигде не плотно. ■

Это рассуждение можно использовать, чтобы доказать нечто большее. Лишь небольшое словесное изменение позволяет применить его и тогда, когда f и все функции f_n определены на произвольном совершенном множестве P. В этом случае нужно рассматривать понятие категории относительно P. Теорема Бэра о категории останется верной: если открытый интервал I пересекается с P, то никакое счетное объединение множеств, нигде не плотных относительно P, не может равняться $I \cap P$. Таким образом, если f — любая функция первого класса, а P — любое совершенное множество, то сужение f на P непрерывно во всех точках P, кроме множества первой категории относительно P. Бэр показал, что верно и обратное, т. е. любая такая функция принадлежит первому классу. (Элементарное доказательство этого см. в работе [4, замечание II][1].) Мы не будем это доказывать, а лишь приведем простой пример, который показывает, что теорему 7.3 обратить нельзя. Пусть $f(x) = 0$ во всех точках, не принадлежащих канторовскому множеству C, $f(x) = 1/2$ в концевых точках всех открытых интервалов, которые выброшены в процессе построения множества C, и $f(x) = 1$ во всех других точках множества C. Функция f непрерывна всюду, кроме множества первой категории, а именно во всех точках из C'. Но сужение f на множество C разрывно в каждой точке C, следовательно, f не является функцией первого класса.

Довольно легко сформулировать необходимое и достаточное условие справедливости утверждения теоремы 7.3.

Теорема 7.4. *Пусть f — действительная функция, определенная на R. Точки разрыва функции f образуют множество первой категории тогда и только тогда, когда f непрерывна на плотном множестве точек.*

Это немедленно следует из теоремы 7.1 и того факта, что F_σ-множество является множеством первой категории тогда и только тогда, когда его дополнение плотно.

Теорема 7.3 представляет собой очень полезный результат. Мы приведем два примера, показывающие, как она помогает ответить на ряд естественных вопросов.

---

[1]) См. также Натансон И. П., Теория функций вещественной переменной, М., 1957. — *Прим. перев.*

Хорошо известно, что тригонометрический ряд может поточечно сходиться к разрывной функции. Однако насколько разрывной может быть такая функция? Может ли сумма всюду сходящегося тригонометрического ряда оказаться всюду разрывной? Теорема 7.3 показывает, что такого случиться не может.

Хорошо известно также, что производная всюду дифференцируемой функции f не обязательно всюду непрерывна. Простым примером является функция

$$f(x) = x^2 \sin(1/x), \quad f(0) = 0.$$

Может ли производная всюду дифференцируемой функции быть всюду разрывной? Теорема 7.3 отвечает и на этот вопрос, так как производная

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x+1/n) - f(x)}{1/n}$$

является функцией первого класса, если она всюду определена и конечна.

Найдя условия, при которых множество D точек разрыва некоторой функции является множеством первой категории, естественно поставить вопрос, при каких условиях D будет нуль-множеством. Ответ дает следующая хорошо известная

Теорема 7.5. *Для того чтобы функция f была интегрируема по Риману на каждом конечном интервале, необходимо и достаточно, чтобы она была ограничена на каждом конечном интервале и чтобы множество ее точек разрыва было нуль-множеством.*

Для данной функции f, ограниченной на I, обозначим через $F(I)$ нижнюю грань сумм вида

$$\sum_{i=1}^{n} \omega(I_i)\,|I_i|,$$

где $\{I_1, \ldots, I_n\}$ — любое разбиение отрезка I, т. е. любое конечное множество неперекрывающихся отрезков, объединение которых равно I. Число $F(I)$ равно разности между верхним и нижним интегралами функции f по I; равенство $F(I) = 0$ представляет собой условие того, что f интегрируема по Риману на I. Легко проверить, что если $\{I_1, \ldots, I_n\}$ — любое разбиение отрезка I, то $F(I) = \sum_1^n F(I_i)$. Лишь это свойство F потребуется для доказательства следующей леммы.

Лемма 7.6. *Если $\omega(x) < \varepsilon$ при любом x из I, то $F(I) < \varepsilon |I|$.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда $F(I) \geqslant \varepsilon |I|$, и поэтому $F(I_1) \geqslant \varepsilon |I|/2$ по крайней мере для одного из отрезков I_1, полученных делением отрезка I пополам. Точно так же $F(I_2) \geqslant \varepsilon |I_1|/2$ по крайней мере для одного из отрезков I_2, полученных делением пополам отрезка I_1. Продолжая процесс деления, мы получим последовательность вложенных отрезков I_n, такую, что $F(I_n) \geqslant \varepsilon |I|/2^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Они пересекаются в какой-то точке x из I. По предположению, $\omega(x) < \varepsilon$, и, значит, $\omega(J) < \varepsilon$ для некоторого открытого интервала J, содержащего x. Выберем n так, чтобы $I_n \subset J$. Тогда

$$F(I_n) \leqslant \omega(I_n) |I_n| \leqslant \omega(J) |I|/2^n < \varepsilon |I|/2^n \leqslant F(I_n),$$

и мы получим противоречие. ■

Следствие 7.7. *Любая непрерывная на отрезке функция интегрируема.*

Стоит заметить, что приведенное доказательство этого факта не использует понятие равномерной непрерывности.

Перейдем теперь к доказательству теоремы 7.5 и предположим сначала, что f интегрируема на I. Тогда для любого положительного целого k можно разбить I на отрезки $I_1, \ldots, I_n$ так, чтобы

$$\sum_{i=1}^n \omega(I_i) |I_i| < 1/k^2.$$

Через $\sum'$ обозначим сумму по тем отрезкам I_i, для которых $\omega(x) \geqslant 1/k$ в какой-то внутренней точке. Тогда

$$1/k^2 > \sum{}' \omega(I_i) |I_i| \geqslant (1/k) \sum{}' |I_i|.$$

Следовательно, $\sum' |I_i| < 1/k$. Множество

$$F_k = \{x \in I;\ \omega(x) \geqslant 1/k\}$$

целиком покрыто этими интервалами, за исключением, быть может, конечного числа точек (концов отрезков разбиения). Значит, $m(F_k) < 1/k$. Если D — множество точек разрыва функции f, то $D \cap I$ равно объединению возрастающей последовательности F_k и мы получаем

$$m(D \cap I) = \lim_{k \to \infty} m(F_k) = 0.$$

Итак, если f интегрируема на любом конечном отрезке, то D является нуль-множеством.

Обратно, пусть D — нуль-множество, и пусть f ограничена на I, причем M и m являются соответственно ее верхней и нижней границами. Для любого $\varepsilon > 0$ выберем k так, что $(M - m) + |I| < k\varepsilon$. Поскольку F_k — ограниченное замкнутое нуль-множество, его можно покрыть конечным числом непересекающихся открытых интервалов, сумма длин которых меньше $1/k$. Концы этих интервалов, которые лежат в I, определяют разбиение I на неперекрывающиеся отрезки I_i и J_j, такие, что $\sum |I_i| < 1/k$ и $\omega(x) < 1/k$ на каждом отрезке J_j. Значит, по лемме 7.6,

$$F(I) = \sum F(I_i) + \sum F(J_j) \leqslant (M - m) \sum |I_i| + \\ + \sum (1/k)\,|J_j| \leqslant (M - m)/k + |I|/k < \varepsilon.$$

Следовательно, f интегрируема по Риману на I.

Завершая изучение точек разрыва, можно поставить еще один вопрос: существует ли естественный класс функций, имеющих лишь счетное число точек разрыва. Ответ дает следующая

Теорема 7.8. *Множество точек разрыва любой монотонной функции f не более чем счетно. Любое счетное множество является множеством точек разрыва некоторой монотонной функции.*

Доказательство. Если f монотонна, то число точек на интервале (a, b), в которых $\omega(x) \geqslant \varepsilon$, не превосходит $|f(b)-f(a)|/\varepsilon$. Значит, множество точек разрыва функции f не более чем счетно. С другой стороны, пусть $\{x_i\}$ — некоторое счетное множество, и пусть $\sum \varepsilon_i$ — сходящийся ряд положительных чисел. Функция $f(x)=\sum\limits_{x_i \leqslant x} \varepsilon_i$ является монотонной и ограниченной. Для нее $\omega(x_i)=\varepsilon_i$ при любом i и $\omega(x)=0$ при всех x, не входящих в последовательность x_i. ▨

Этот факт полезно сравнить с другой, намного более глубокой теоремой, принадлежащей Лебегу, о том, что любая монотонная функция дифференцируема (имеет конечную производную) всюду, кроме, быть может, некоторого множества меры нуль [25, стр. 13].

ГЛАВА 8

ТЕОРЕМА ЛУЗИНА И ТЕОРЕМА ЕГОРОВА

Действительная функция f, определенная на R, называется *измеримой*, если множество $f^{-1}(U)$ измеримо для любого открытого множества $U \subset R$. Будем говорить, что f обладает *свойством Бэра*, если $f^{-1}(U)$ обладает свойством Бэра для любого открытого $U \subset R$. В обоих определениях в качестве U можно брать не любые открытые множества, а лишь принадлежащие некоторой базе, или, наоборот, можно разрешить U пробегать все борелевские множества. Характеристическая функция χ_E множества $E \subset R$ измерима тогда и только тогда, когда измеримо E; χ_E обладает свойством Бэра тогда и только тогда, когда им обладает E.

Если E обладает свойством Бэра, то $E = G \triangle P = F \triangle Q$, где G открыто, F замкнуто, а P и Q — множества первой категории. Множество $E \setminus (P \cup Q) = G \setminus (P \cup Q) = F \setminus (P \cup Q)$ одновременно замкнуто и открыто относительно $R \setminus (P \cup Q)$, и, значит, сужение χ_E на дополнение к $P \cup Q$ является непрерывной функцией. В более общем случае связь между непрерывностью и свойством Бэра такова [12, стр. 408]:

Теорема 8.1. *Действительная функция f, определенная на R, обладает свойством Бэра тогда и только тогда, когда существует такое множество P первой категории, что сужение f на $R \setminus P$ является непрерывной функцией.*

Доказательство. Пусть $U_1, U_2, \ldots$ — счетная база топологии в R, например открытые интервалы с рациональными концами. Если f обладает свойством Бэра, то $f^{-1}(U_i) = G_i \triangle P_i$, где G_i — открытое множество, а P_i — множество первой категории. Положим $P = \bigcup\limits_{1}^{\infty} P_i$. Тогда P — множество первой категории. Сужение g функции f на $R \setminus P$ непрерывно, так как множество $g^{-1}(U_i) = f^{-1}(U_i) \setminus P = (G_i \triangle P_i) \setminus P = G_i \setminus P$ является открытым относительно $R \setminus P$ при любом i, а значит, таким же будет и множество $g^{-1}(U)$ при любом открытом U.

Обратно, если сужение g функции f на дополнение некоторого множества P первой категории является непрерывной функцией, то для любого открытого множества U имеем $g^{-1}(U) = G \setminus P$, где G — некоторое открытое множество. Так как

$$g^{-1}(U) \subset f^{-1}(U) \subset g^{-1}(U) \cup P,$$

то

$$G \setminus P \subset f^{-1}(U) \subset G \cup P.$$

Значит, $f^{-1}(U) = G \triangle Q$ для некоторого $Q \subset P$. Таким образом, f обладает свойством Бэра. ■

Не столь простой характер носит связь между непрерывностью и измеримостью. Эту связь выражает следующая теорема, известная как *теорема Лузина*.

Теорема 8.2 (Лузин). *Действительная функция f на R измерима тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдется множество E, такое, что $m(E) < \varepsilon$ и сужение f на $R \setminus E$ является непрерывной функцией.*

Доказательство. Пусть $U_1, U_2, \ldots$ — счетная база топологии в R. Если f измерима, то для каждого i найдутся замкнутое множество F_i и открытое множество G_i, такие, что

$$F_i \subset f^{-1}(U_i) \subset G_i \quad \text{и} \quad m(G_i \setminus F_i) < \varepsilon/2^i.$$

Положим $E = \bigcup_1^\infty (G_i \setminus F_i)$. Тогда $m(E) < \varepsilon$. Если g — сужение f на $R \setminus E$, то

$$g^{-1}(U_i) = f^{-1}(U_i) \setminus E = F_i \setminus E = G_i \setminus E.$$

Значит, $g^{-1}(U_i)$ одновременно замкнуто и открыто относительно $R \setminus E$, откуда следует, что g непрерывно.

Обратно, если f обладает указанным свойством, то найдется последовательность множеств E_i, $m(E_i) < 1/i$, такая, что сужения f_i функции f на $R \setminus E_i$ непрерывны. Для любого открытого множества U найдется открытое множество G_i, такое, что $f_i^{-1}(U) = G_i \setminus E_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Положив $E = \bigcap_1^\infty E_i$, получим

$$f^{-1}(U) \setminus E = \bigcup_{i=1}^{\infty} (f^{-1}(U) \setminus E_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f_i^{-1}(U).$$

Следовательно,

$$f^{-1}(U) = [f^{-1}(U) \cap E] \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} (G_i \setminus E_i).$$

Все эти множества измеримы, так как $m(E) = 0$, и, значит, f — измеримая функция. ∎

Измеримая функция может не быть непрерывной на дополнении к некоторому нуль-множеству. Чтобы в этом убедиться, построим такой пример. Пусть $U_1, U_2, \ldots$ — база топологии в R. Так как каждый интервал содержит некоторое нигде не плотное множество положительной меры, то мы можем по индукции определить последовательность непересекающихся нигде не плотных множеств N_n, такую, что $m(N_n) > 0$ и $N_{2n} \cup N_{2n-1} \subset U_n$. Пусть $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} N_{2n}$ и f — характеристическая функция множества A. Так как и A, и $R \setminus A$ имеют положительную меру в каждом интервале, то сужение f на дополнение к любому нуль-множеству нигде не будет непрерывной функцией.

Следующий результат, известный как *теорема Егорова*, устанавливает связь между сходимостью и равномерной сходимостью.

Теорема 8.3. *Если последовательность измеримых функций f_n сходится к f в каждой точке некоторого множества E конечной меры, то для любого $\varepsilon > 0$*

найдется множество $F \subset E$, такое, что $m(F) < \varepsilon$ и f_n сходится к f равномерно на $E \setminus F$.

Доказательство. Для любых двух положительных целых чисел n и k положим

$$E_{n,k} = \bigcup_{i=n}^{\infty} \{x \in E;\ |f_i(x) - f(x)| \geqslant 1/k\}.$$

Тогда $E_{n,k} \supset E_{n+1,k}$ и $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_{n,k} = \varnothing$ для любого k. Для заданного $\varepsilon > 0$ и любого k найдется целое число $n(k)$, такое, что $m(E_{n(k),k}) < \varepsilon/2^k$. Положим $F = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{n(k),k}$. Тогда $m(F) < \varepsilon$. Для любого k верно включение $E \setminus F \subset E \setminus E_{n(k),k}$. Значит, $|f_i(x) - f(x)| < 1/k$ для всех $i \geqslant n(k)$ и всех $x \in E \setminus F$. Таким образом, f_n равномерно сходится к f на $E \setminus F$. ■

Интересно отметить, что, в то время как теорема Лузина имеет вполне удовлетворительный аналог в терминах категории — теорему 8.1, для теоремы Егорова соответствующий аналог неверен. Это видно из следующего примера.

Пусть $\varphi(x)$ — кусочно-линейная функция, определенная равенствами: $\varphi(x) = 2x$ на $[0, 1/2]$, $\varphi(x) = 2 - 2x$ на $[1/2, 1]$ и $\varphi(x) = 0$ на $R \setminus [0, 1]$. Тогда $\lim_{n \to \infty} \varphi(2^n x) = 0$ при всех x из R. Пусть $\{r_i\}$ — какая-то плотная в R последовательность, и пусть $f_n(x) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \varphi(2^n(x - r_i))$. Как сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций, f_n непрерывна на R и $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = 0$ при каждом x из R. Если (a, b) — любой открытый интервал, то $r_i \in (a, b)$ при некоторых i, и мы получаем $\sup_{a<x<b} f_n(x) \geqslant 1/2^i$ для всех достаточно больших n. Отсюда видно, что f_n не сходится равномерно на (a, b). Пусть E — любое множество, на котором f_n сходится равномерно. Это

означает, что если мы положим $\alpha_n = \sup\limits_{x \in E} f_n(x)$, то $\alpha_n \to 0$. Так как f_n непрерывны, то α_n является верхней гранью f_n и на множестве $\overline{E}$. Значит, f_n сходятся равномерно к нулю на $\overline{E}$. Но из доказанного выше видно, что $\overline{E}$ не может содержать интервала. Следовательно, любое множество, на котором последовательность $\{f_n\}$ сходится равномерно, будет нигде не плотным.

ГЛАВА 9

МЕТРИЧЕСКИЕ И ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Полезность понятия категории полностью проявляется лишь в случае более общих пространств, особенно метрических пространств. Напомним основные определения.

Метрическим пространством называется множество X вместе с *функцией расстояния*, или *метрикой*, $\rho(x, y)$, определенной для всех пар точек из X и удовлетворяющей таким условиям:

(1) $\rho(x, y) \geqslant 0, \quad \rho(x, x) = 0$;

(2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;

(3) $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$ (неравенство треугольника);

(4) если $\rho(x, y) = 0$, то $x = y$.

Это понятие (введенное Фреше) возникает в результате естественного обобщения некоторых свойств расстояния в евклидовом пространстве любого числа измерений. Многие теоремы анализа становятся проще и яснее, если их формулировать в терминах подходящей метрики.

Говорят, что последовательность $x_1, x_2, \ldots$ точек метрического пространства (X, ρ) *сходится к точке* x, если $\rho(x_n, x) \to 0$ при $n \to \infty$. Мы в этом случае будем писать $x_n \to x$. Множество точек $\{x; \rho(x_0, x) < r\}$, $r > 0$, называется *r-окрестностью* точки x_0, или *шаром* радиуса r с центром в x_0.

Множество $G \subset X$ называется *открытым*, если для любого $x \in G$ оно содержит некоторый шар с центром в x. Все шары являются открытыми множествами; произвольные объединения и конечные пересечения открытых множеств суть открытые множества. Любой класс $\mathscr{T}$ подмножеств множества X, такой, что $\varnothing$, X, объединение любого подкласса из $\mathscr{T}$ и пересечение любого конечного подкласса из $\mathscr{T}$ принадлежат $\mathscr{T}$, называется *топологией в* X, а пара $(X, \mathcal{T})$ называется *топологическим пространством*. Подкласс $\mathcal{T}_0 \subset \mathcal{T}$ называется *базой* топологии, если каждый элемент из $\mathcal{T}$ является объединением некоторого семейства из $\mathcal{T}_0$. Открытые подмножества любого метрического пространства X образуют некоторую топологию в X, но не всякая топология задается именно таким образом.

Метрическое пространство называется *сепарабельным*, если в нем имеется счетное плотное подмножество или, что эквивалентно, счетная база. Две метрики в множестве X *топологически эквивалентны*, если они задают одну и ту же топологию. Очень часто основной интерес представляет именно топологическая структура метрического пространства, а метрика играет вспомогательную роль. Любое свойство, которое можно описать с использованием только понятия открытого множества, является топологическим свойством. Примером такого свойства может служить сходимость, так как $x_n \to x$ тогда и только тогда, когда каждое открытое множество, содержащее x, содержит все члены последовательности, кроме конечного числа из них.

Дополнение к открытому множеству называется *замкнутым множеством*. В метрическом пространстве X множество F замкнуто тогда и только тогда, когда из того, что $\{x_n\} \subset F$ и $x_n \to x$, следует, что $x \in F$. Наименьшее замкнутое множество, содержащее множество A, называется замыканием A. Оно обозначается $\bar{A}$ или A^-. Подобно этому наибольшее открытое множество, содержащееся в A, называется *открытым ядром* множества A. Оно равно $A'^{-'}$. Если x принадлежит открытому ядру множества A, то A является *окрестностью* x. Множество A *плотно* (в X), если $\bar{A} = X$, т. е. если каждое непустое открытое множество содержит по крайней мере одну точку из A. Множество A *нигде не плотно*, если открытое ядро его замыкания пусто, т. е. если для любого непустого открытого множества G найдется непустое открытое множество H, содержащееся в $G \setminus A$. Некоторое множество является множеством *первой категории*, если его можно представить в виде счетного объединения нигде не плотных множеств. В противном случае оно является множеством *второй категории.* Борелевские множества, G_δ-множества, F_σ-множества и множества, обладающие свойством Бэра, определяются точно так же, как раньше. Все это — топологические свойства множеств, и данные определения пригодны для любого топологического пространства.

Отображение f топологического пространства X в топологическое пространство Y назовем *непрерывным в точке* $x_0 \in X$, если для любого открытого множества V, содержащего $f(x_0)$, найдется окрестность U точки x_0, такая, что $f(x) \in V$ для всех $x \in U$. Отображение f: $X \to Y$ *непрерывно*, если оно непрерывно в каждой точке из X. Взаимно однозначное отображение f множества X на Y называется *гомеоморфизмом*, если как f, так и f^{-1} непрерывны. Если такое отображение существует, то говорят, что X и Y *гомеоморфны*, или *топологически эквивалентны*. Две метрики ρ и σ в множестве X топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда тождественное отображение X на себя является гомеоморфизмом пространства (X, ρ) на (X, σ). А для этого необходимо и достаточно, чтобы $\rho(x_n, x) \to 0$ тогда и только тогда, когда $\sigma(x_n, x) \to 0$.

Последовательность точек x_n метрического пространства (X, ρ) называется *последовательностью Коши*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется положительное целое n, такое, что $\rho(x_i, x_j) < \varepsilon$ для всех $i, j \geqslant n$. Всякая сходящаяся последовательность является последовательностью Коши, но обратное, вообще говоря, не верно. Однако имеется важный класс пространств, в которых каждая последовательность Коши сходится. Такие метрические пространства называются *полными*. Например, действительная прямая является полным пространством по отношению к обычной метрике $|x - y|$.

Важно отдавать себе отчет в том, что полнота не является топологическим свойством и что класс последовательностей Коши (в отличие от класса сходящихся последовательностей) не сохраняется при гомеоморфизме. Например, отображение, переводящее x

в $\operatorname{arctg} x$, есть гомеоморфизм прямой X на открытый интервал $Y = (-\pi/2, \pi/2)$. Здесь X полно, а Y неполно. Последовательность $y_n = \operatorname{arctg} n$ является последовательностью Коши в Y, а последовательность $x_n = n$ в X таковой не является.

Метрическое пространство (X, ρ) назовем *топологически полным*, если оно гомеоморфно некоторому полному пространству. Если f — гомеоморфизм (X, ρ) на полное пространство (Y, σ), то $\sigma(f(x), f(y))$ задает в X метрику, топологически эквивалентную метрике ρ. Таким образом, метрическое пространство топологически полно тогда и только тогда, когда его можно сделать полным путем введения новой метрики (топологически эквивалентной исходной). Важное свойство таких пространств состоит в том, что для них сохраняется теорема Бэра о категории.

Теорема 9.1. *Если X — топологически полное метрическое пространство и A — множество первой категории в X, то $X \setminus A$ плотно в X.*

Доказательство. Пусть $A = \bigcup\limits_n A_n$, где A_n нигде не плотны, пусть ρ — метрика, по отношению к которой X полно, и пусть S_0 — непустое открытое множество. Выберем последовательность вложенных шаров S_n радиусов $r_n < 1/n$ так, чтобы $\bar{S}_n \subset S_{n-1} \setminus A_n$ $(n \geqslant 1)$. Это можно сделать шаг за шагом, выбирая в качестве S_n шар достаточно малого радиуса с центром x_n из множества $S_{n-1} \setminus \bar{A}_n$ (оно не пусто, потому что $\bar{A}_n$ нигде не плотно). Тогда $\{x_n\}$ — последовательность Коши, так как

$$\rho(x_i, x_j) \leqslant \rho(x_i, x_n) + \rho(x_n, x_j) < 2r_n \quad \text{при} \quad i, j \geqslant n.$$

Значит, $x_n \to x$ для некоторой точки x из X. Так как $x_i \in \bar{S}_n$ при $i \geqslant n$, то отсюда получаем, что $x \in \bigcap\limits_n \bar{S}_n \subset S_0 \setminus A$. Это показывает, что $X \setminus A$ плотно в X. ■

Топологическое пространство X называется *пространством Бэра*, если каждое непустое открытое множество в X является множеством второй категории, или, что эквивалентно, если дополнение к каждому множеству первой категории является плотным. В пространстве Бэра дополнение к каждому множеству первой категории называется *остаточным множеством.*

Теорема 9.2. *В пространстве Бэра X множество E является остаточным тогда и только тогда, когда оно содержит некоторое G_δ-подмножество, плотное в X.*

Доказательство. Предположим, что $B = \bigcap_n G_n$, где G_n — открытое множество, является G_δ-подмножеством в E, плотным в X. Тогда каждое G_n плотно и $X \setminus E \subset X \setminus B = \bigcup_n (X \setminus G_n)$ — множество первой категории. Обратно, если $X \setminus E = \bigcup_n A_n$, где A_n нигде не плотны, то положим $B = \bigcap_n (X \setminus \bar{A}_n)$. Тогда B является G_δ-множеством, содержащимся в E. Его дополнение $X \setminus B = \bigcup_n \bar{A}_n$ есть множество первой категории. Так как X — пространство Бэра, то отсюда следует, что B плотно в X. ∎

ГЛАВА 10

ПРИМЕРЫ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

Обозначим через C, или $C[a, b]$, множество всех действительных непрерывных функций f, определенных на отрезке $[a, b]$, и положим

$$\rho(f, g) = \sup_{a \leqslant x \leqslant b} | f(x) - g(x) |.$$

Легко проверить, что ρ является метрикой в C; скажем, неравенство треугольника следует из того, что для всех x из $[a, b]$ выполняется неравенство

$$| f(x) - h(x) | \leqslant | f(x) - g(x) | + | g(x) - h(x) | \leqslant$$
$$\leqslant \rho(f, g) + \rho(g, h).$$

Сходимость в этой метрике означает равномерную сходимость на $[a, b]$. Поэтому ρ называют *равномерной метрикой.*

Пусть $\{f_n\}$ — произвольная последовательность Коши из C, и пусть $\rho(f_i, f_j) \leqslant \varepsilon$ для всех $i, j \geqslant n(\varepsilon)$. Тогда

$$| f_i(x) - f_j(x) | \leqslant \varepsilon \quad \text{для всех} \quad i, j \geqslant n(\varepsilon) \quad \text{и} \quad a \leqslant x \leqslant b.$$

Значит, $\{f_n(x)\}$ является последовательностью Коши действительных чисел для всех x из $[a, b]$ и потому сходится к некоторому пределу $f(x)$. Полагая $j \to \infty$, мы видим, что $|f_i(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$ для всех $i \geqslant n(\varepsilon)$ и всех x из $[a, b]$. Таким образом, f_i сходится к f равномерно на $[a, b]$. Отсюда по известной теореме следует, что f непрерывна на $[a, b]$. Значит, $f_i \to f$ в C. Это доказывает полноту пространства (C, ρ).

Рассмотрим теперь то же самое множество C, но возьмем в нем другую метрику:

$$\sigma(f, g) = \int_a^b | f(x) - g(x) | \, dx.$$

Снова легко проверить, что все аксиомы выполняются. Но эта метрика не будет топологически эквивалентной метрике ρ. Чтобы в этом убедиться, возьмем $f_n(x) = \max(1 - n(x-a), 0)$, а в качестве f возьмем функцию, тождественно равную нулю. Тогда $\sigma(f_n, f) = 1/2n$ при $n > 1/(b-a)$, но $\rho(f_n, f) = 1$. Таким образом, f_n сходится к f в (C, σ), но не сходится в (C, ρ), и, значит, эти пространства не гомеоморфны.

Чтобы показать, что (C, σ) не является полным, возьмем $[a, b] = [0, 1]$ и положим

$$f_n(x) = \begin{cases} \min(1,\ 1/2 - n(x-1/2)) & \text{на} \quad [0,\ 1/2], \\ \max(0,\ 1/2 - n(x-1/2)) & \text{на} \quad [1/2,\ 1]. \end{cases}$$

Из графиков этих функций ясно, что

$$\sigma(f_n, f_m) = (1/4)\,|\,1/n - 1/m\,|.$$

Значит, f_n является последовательностью Коши. Предположим, что $\sigma(f_n, f) \to 0$ при $n \to \infty$ для некоторой f из C. Тогда

$$\sigma(f_n, f) \geqslant \int\limits_0^{1/2-1/2n} |\,1 - f(x)\,|\,dx + \int\limits_{1/2+1/2n}^{1} |\,f(x)\,|\,dx.$$

Полагая $n \to \infty$, получим, что

$$\int\limits_0^{1/2} |\,1 - f(x)\,|\,dx = \int\limits_{1/2}^{1} |\,f(x)\,|\,dx = 0.$$

Но f непрерывна, и поэтому на $[0, 1/2]$ должно выполняться равенство $f(x) = 1$, а на $[1/2, 1]$ — равенство $f(x) = 0$, что невозможно.

Рассмотрим далее множество $R[a, b]$ интегрируемых по Риману функций на отрезке $[a, b]$ с той же метрикой σ. Здесь возникает осложнение: четвертая аксиома не выполняется. Множество X, в котором функция расстояния удовлетворяет только трем первым аксиомам, называется *псевдометрическим пространством.* Такое пространство всегда можно сделать метрическим, отождествив точки x и y, для которых $\rho(x, y) = 0$. Легко проверить, что этим задается отношение эквивалентности в X и что значение $\rho(x, y)$ зависит только от классов эквивалентности, которым принадлежат x и y. Если эти классы взять в качестве элементов нового множества $\tilde{X}$, то $(\tilde{X}, \rho)$ будет метрическим пространством. В частности, если мы отождествим любые два элемента из $R[a, b]$, отличающиеся на функцию f, для которой $\int_a^b |f(x)|\,dx = 0$, то получим метрическое пространство $(\tilde{R}, \sigma)$, называемое *пространством R-интегрируемых функций* на $[a, b]$. Пусть $\tilde{f}$ обозначает тот класс эквивалентности, которому принадлежит f. Отображение $f \to \tilde{f}$ из (C, σ) в $(\tilde{R}, \sigma)$ сохраняет расстояние. Таким образом, $(\tilde{R}, \sigma)$ содержит подмножество, *изометричное* пространству (C, σ). Это подмножество не совпадает со всем пространством $(\tilde{R}, \sigma)$, так как, если, например, в качестве f взять характеристическую функцию отрезка $[a, (a+b)/2]$, то $\tilde{f}$ принадлежит $\tilde{R}$, но ни один элемент из $\tilde{f}$ не может быть непрерывной функцией.

Для любого положительного целого M положим

$$E_M = \{\tilde{f};\ f \in R[a, b] \text{ и } |f| \leqslant M\}.$$

Так как каждая интегрируемая функция ограничена, то $\tilde{R} = \bigcup_{M=1}^{\infty} E_M$. Для любого элемента $\tilde{f}_0 \in E_M$, для которого $|f_0| \leqslant M$, положим $g = f_0 + (2M+1)\chi_I$, где χ_I — характеристическая функция интервала I длины ε, содержащегося в $[a, b]$. Тогда $\sigma(\tilde{f}_0, \tilde{g}) = (2M+1)\varepsilon$. Если $|f| \leqslant M$, то $|g - f| \geqslant 1$ в точках I, и поэтому $\sigma(\tilde{f}, \tilde{g}) \geqslant \varepsilon$. Значит, никакой элемент из ε-окрестности $\tilde{g}$ не принадлежит множеству E_M. Так как $\tilde{g}$ можно взять сколь угодно близко к $\tilde{f}_0$, то этим доказано, что E_M нигде не плотно в $\tilde{R}$. Следовательно, $\tilde{R}$ является множеством первой категории на самом себе. Отсюда видно, что $\tilde{R}$ не является полным пространством. Более того, никакая другая метризация не может сделать его полным, так как категория является топологическим свойством.

В качестве последнего примера рассмотрим класс S множеств конечной меры в любом пространстве с мерой и положим

$$\rho(E, F) = m(E \triangle F).$$

Первые две аксиомы метрического пространства очевидны, а неравенство треугольника справедливо, так как

$$\rho(E, H) = m(E \triangle H) = m((E \triangle F) \triangle (F \triangle H)) \leqslant$$
$$\leqslant m(E \triangle F) + m(F \triangle H) = \rho(E, F) + \rho(F, H).$$

Четвертая аксиома будет выполняться, если мы отождествим множества, которые отличаются на нуль-множество. Тем самым мы получим метрическое пространство $(\tilde{S}, \rho)$. Для доказательства полноты этого пространства обозначим через $\tilde{E}_n$ какую-нибудь последовательность Коши из $(\tilde{S}, \rho)$. Тогда для любого положительного целого i найдется такой индекс n_i, что $\rho(E_n, E_m) < 1/2^i$ при всех $n, m \geqslant n_i$; при этом можно считать, что $n_i < n_{i+1}$. Положив $F_i = E_{n_i}$, получим $\rho(F_i, F_j) < 1/2^i$ для всех $j > i$. Определим

$$H_i = \bigcap_{j=i}^{\infty} F_j \quad \text{и} \quad E = \bigcup_{i=1}^{\infty} H_i.$$

Все эти множества принадлежат S. Множество E состоит из точек, принадлежащих всем множествам $F_1, F_2, \ldots$, за исключением конечного числа из них. Легко проверить, что множества $E \triangle H_i$ и $H_i \triangle F_i$, а значит, и $E \triangle F_i$, содержатся в множестве

$$(F_i \triangle F_{i+1}) \cup (F_{i+1} \triangle F_{i+2}) \cup (F_{i+2} \triangle F_{i+3}) \cup \ldots .$$

Следовательно,

$$m(E \triangle F_i) \leqslant \sum_{j=i}^{\infty} m(F_j \triangle F_{j+1}) < \sum_{j=i}^{\infty} 1/2^j = 1/2^{i-1}.$$

Для любого $n \geqslant n_i$ получаем

$$m(E \triangle E_n) = m((E \triangle F_i) \triangle (E_{n_i} \triangle E_n)) \leqslant$$
$$\leqslant m(E \triangle F_i) + m(E_{n_i} \triangle E_n) < 1/2^{i-1} + 1/2^i.$$

Отсюда следует, что $\tilde{E}_n$ сходятся к $\tilde{E}$ в пространстве $(\tilde{S}, \rho)$.

Заметим, что когда в роли m выступает двумерная мера Лебега на плоскости, то пространство $(\tilde{S}, \rho)$ содержит подмножество, изометричное пространству $(\tilde{R}, \sigma)$. Для любой действительной функции f на $[a, b]$ обозначим через $\varphi(f)$ ее *ординатное множество*, т. е. множество

$$\varphi(f) = \{(x, y);\ a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant y \leqslant f(x) \quad \text{или} \quad f(x) \leqslant y \leqslant 0\}.$$

Нетрудно обнаружить, что если f и g принадлежат $R[a, b]$, то

$$\int_a^b |f - g| = m(\varphi(f) \bigtriangleup \varphi(g)).$$

Значит, φ переводит эквивалентные функции в эквивалентные множества и определяет изометричное вложение $(\tilde{R}, \sigma)$ в $(\tilde{S}, \rho)$. Можно показать, что замыкание $\varphi(\tilde{R})$ в $(\tilde{S}, \rho)$ изометрично пространству L^1 функций, интегрируемых по Лебегу на $[a, b]$. Вряд ли такой путь введения интеграла Лебега является самым легким, однако он указывает на одну из причин, по которой необходимо расширить класс интегрируемых функций. Так как $(\tilde{R}, \sigma)$ является множеством первой категории на самом себе, то оно будет множеством первой категории и в любом пространстве, которое его топологически содержит. В частности, $\tilde{R}$ — множество первой категории в пространстве интегрируемых по Лебегу функций [17][1]).

[1]) Справедливо более сильное утверждение: для любых p и q, $1 \leqslant p < q \leqslant +\infty$, множество L^p есть множество первой категории в пространстве L^p (см. [17]). (Здесь L^q обозначает множество функций, q-я степень которых интегрируема по Лебегу.) — *Прим. перев.*

ГЛАВА II

НИГДЕ НЕ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ ФУНКЦИИ

Известно много примеров нигде не дифференцируемых функций. Первый такой пример построил Вейерштрасс. Одно из наиболее простых доказательств существования нигде не дифференцируемых функций дал Банах (1931) [12, стр. 431]. Оно опирается на метод категорий. Банах показал, что в смысле категории почти все непрерывные функции нигде не дифференцируемы; фактически для непрерывной функции существование где-нибудь на интервале конечной односторонней производной или даже ограниченность разностных отношений $\Delta f/\Delta x$ в какой-нибудь точке с какой-нибудь стороны является исключительным случаем.

В пространстве C непрерывных функций на $[0, 1]$ с равномерной метрикой рассмотрим множество E_n таких функций f, для которых при некотором x из отрезка $[0, 1-1/n]$ и при всех $0 < h < 1-x$ справедливо неравенство $|f(x+h)-f(x)| \leqslant nh$. Для доказательства замкнутости E_n рассмотрим любую функцию f из замыкания E_n и какую-нибудь последовательность $\{f_k\}$ из E_n, которая сходится к f. Найдется соответствующая последовательность чисел x_k, такая, что при каждом k

$$(1) \qquad 0 \leqslant x_k \leqslant 1-1/n$$

и

$$(2) \quad |f_k(x_k+h)-f_k(x_k)| \leqslant nh \text{ для всех } 0 < h < 1-x_k.$$

Можно предположить еще, что

$$(3) \quad x_k \to x \quad \text{для некоторого } x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1-1/n,$$

потому что этого можно добиться, заменив $\{f_k\}$ соответствующей подпоследовательностью. Если $0 < h <$

$< 1 - x$, то для всех достаточно больших k справедливо неравенство $0 < h < 1 - x_k$, и тогда

$$\begin{aligned}|f(x+h)-f(x)| &\leqslant |f(x+h)-f(x_k+h)| + \\ &+ |f(x_k+h)-f_k(x_k+h)| + |f_k(x_k+h)-f_k(x_k)| + \\ &+ |f_k(x_k)-f(x_k)| + |f(x_k)-f(x)| \leqslant \\ &\leqslant |f(x+h)-f(x_k+h)| + \rho(f, f_k) + \\ &+ nh + \rho(f_k, f) + |f(x_k)-f(x)|.\end{aligned}$$

Полагая $k \to \infty$ и используя непрерывность f в точках x и $x+h$, получаем, что

$$|f(x+h)-f(x)| \leqslant nh \quad \text{для всех} \quad 0 < h < 1 - x.$$

Таким образом, f принадлежит множеству E_n.

Любая непрерывная функция на $[0, 1]$ может быть сколь угодно точно равномерно приближена кусочно-линейной непрерывной функцией g. Для того чтобы показать, что E_n нигде не плотно в C, достаточно показать, что для любой такой функции g и любого $\varepsilon > 0$ найдется функция h из $C \setminus E_n$, такая, что $\rho(g, h) \leqslant \varepsilon$. Обозначим через M максимум абсолютных величин угловых коэффициентов линейных сегментов, образующих график функции g, и подберем целое число m так, чтобы $m\varepsilon > n + M$. Через φ обозначим «пилообразную» функцию $\varphi(x) = \min(x - [x], [x] + 1 - x)$ (=расстояние от x до ближайшего целого числа) и положим $h(x) = g(x) + \varepsilon\varphi(mx)$. Тогда в каждой точке из $[0, 1)$ функция h имеет правую производную, которая по абсолютной величине больше n. Это следует из того, что правая производная функции $\varepsilon\varphi(mx)$ всюду в $[0, 1)$ равна $\pm\varepsilon m$, а правая производная $g(x)$ по абсолютной величине не превосходит M. Значит, $h \in C \setminus E_n$. Поскольку $\rho(g, h) = \varepsilon/2$, отсюда следует, что E_n нигде не плотно в C. Следовательно $E = \bigcup\limits_n E_n$ является множеством первой категории в C. Это множество состоит из всех непрерывных функций, имеющих ограниченные правые разностные отношения в какой-нибудь точке из $[0, 1)$. Аналогично множеством первой категории является множество функций, имеющих ограниченные левые разностные отношения в какой-нибудь точке из $(0, 1]$; это можно вывести из уже доказанного, если рассмотреть изометрию пространства C, определяемую подстановкой $1-x$ вместо x. Объединение этих двух множеств включает в себя все функции из C, которые где-нибудь на $[0, 1]$ имеют конечную одностороннюю производную.

При помощи похожих рассуждений можно показать, что некоторое остаточное множество функций из C нигде не имеет бесконечной (двусторонней) производной. Возникает вопрос, а нельзя ли пойти еще дальше и построить непрерывную функцию, которая нигде не имеет ни конечной, ни бесконечной односторонней производной. Такая в сильном смысле нигде не дифференцируемая функция была впервые построена Безиковичем в 1922 г. Интересно, однако, заметить, что существование таких функций уже нельзя доказать методом категорий; Сакс (1932) показал, что множество таких функций имеет лишь первую категорию в C. Точнее говоря, Сакс показал, что остаточное множество непрерывных функций имеет равную $+\infty$ правую производную в несчетном множестве точек (см. [12, стр. 431]).

Применение теоремы Бэра о категории для доказательства непустоты некоторого множества сводится к доказательству того, что какой-то элемент этого множества может быть определен как предел подходящим образом построенной последовательности. Например, из приведенного выше доказательства видно, что нигде не дифференцируемую функцию можно получить как сумму равномерно сходящегося ряда вида $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \varphi(m_n x)$. Преимущество метода категорий состоит в том, что он дает не один, а целый класс примеров, причем проблема обычно упрощается и появляется возможность сосредоточиться на принципиальных трудностях. Когда метод применим, пример всегда можно построить путем последовательных приближений, начатых где угодно в пространстве. Это верно по крайней мере в принципе. Однако если доказательство нигде не плотности достаточно громоздкое или непрямое, может оказаться затруднительным получить таким способом явный вид примера.

ГЛАВА 12

ТЕОРЕМА АЛЕКСАНДРОВА

Любое подмножество метрического пространства само является метрическим пространством с той же самой метрикой. Очевидно, что любое замкнутое подмножество полного метрического пространства полно относительно той же метрики. В каком случае подпространство можно метризовать так, чтобы оно стало полным? Ответ содержится в следующей теореме.

Теорема 12.1 (Александров). *Любое непустое G_δ-множество полного метрического пространства топологически полно, т. е. оно становится полным после некоторой метризации.*

Следуя Куратовскому (1955), мы докажем эту теорему с помощью следующей леммы:

Лемма 12.2 [12, стр. 419]. *Пусть (X, ρ) — некоторое метрическое пространство, и пусть существует такая последовательность $\{f_i\}$ действительных функций, определенных на X, что всякая последовательность Коши $\{x_n\}$ является сходящейся, если только каждая из последовательностей $\{f_1(x_n)\}$, $\{f_2(x_n)\}$, ... ограничена. Тогда X можно метризовать так, что оно станет полным.*

Доказательство. Определим новое расстояние в X, положив

$$\sigma(x, y) = \rho(x, y) + \sum_{i=1}^{\infty}(1/2^i)\min(1, |f_i(x) - f_i(y)|).$$

Для проверки аксиомы треугольника достаточно заметить, что ей удовлетворяет каждое слагаемое. Выполнение других аксиом очевидно.

Для любого $\varepsilon > 0$ и $x \in X$ найдутся такое целое N, что $2^{-N} < \varepsilon$, и такое положительное $\delta < \varepsilon$, что из

$\rho(x, y) < \delta$ следует $|f_i(x) - f_i(y)| < \varepsilon$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$. Если $\rho(x, y) < \delta$, то

$$\sigma(x, y) < \varepsilon + \sum_{i=1}^{N} (1/2^i) | f_i(x) - f_i(y) | + 1/2^N < 3\varepsilon.$$

Следовательно, $\sigma(x, x_n) \to 0$, если $\rho(x, x_n) \to 0$. Обратное следует из неравенства $\rho(x, y) \leqslant \sigma(x, y)$. Таким образом, σ и ρ — эквивалентные метрики.

Для доказательства полноты (X, σ) возьмем последовательность $\{x_n\}$, которая является последовательностью Коши по отношению к метрике σ. Тогда для любого положительного целого i найдется такое целое N, что $\sigma(x_n, x_m) < 1/2^i$ для всех n, $m \geqslant N$. При всех n, $m \geqslant N$ выполняется неравенство

$$1 > 2^i \sigma(x_n, x_m) \geqslant \min(1, | f_i(x_n) - f_i(x_m) |)$$

и, следовательно,

$$| f_i(x_n) - f_i(x_m) | < 1.$$

Значит, последовательность $\{f_i(x_n)\}$ ограничена при любом i. Так как $\rho(x, y) \leqslant \sigma(x, y)$, то $\{x_n\}$ — последовательность Коши и относительно метрики ρ. Следовательно, по условию леммы последовательность $\{x_n\}$ сходится. ■

Доказательство теоремы 12.1. Пусть X — непустое G_δ-множество полного метрического пространства (Y, ρ). Тогда $X = \bigcap_i G_i$, где G_i открыты в Y. Положим $F_i = Y \setminus G_i$ и

$$d(x, F_i) = \inf \{\rho(x, y);\ y \in F_i\}.$$

Можно считать, что каждое из множеств F_i непусто. Тогда $d(x, F_i)$ является действительной непрерывной функцией на Y, положительной на множестве X. Функции $f_i(x) = 1/d(x, F_i)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ удовлетворяют условиям леммы 12.2. В самом деле, пусть $\{x_n\}$ — последовательность Коши точек из X, и пусть при каждом i последовательность $\{f_i(x_n)\}$ ограничена. Тогда в силу полноты Y последовательность x_n сходится в Y к некоторой точке y. Эта точка y не может принадлежать F_i, так как тогда последовательность $f_i(x_n) \geqslant 1/\rho(x_n, y)$ была бы неограниченной. Значит, $y \in G_i$ при каждом i, т. е. $y \in X$. Таким образом, последовательность $\{x_n\}$ сходится в подпространстве X. Следовательно, по лемме 12.2, X можно метризовать так, что оно станет полным. ■

Теорема Александрова допускает такое обращение:

Теорема 12.3. *Если подмножество X метрического пространства (Z, ρ) гомеоморфно полному метрическому пространству (Y, σ), то X является G_δ-подмножеством в Z.*

Доказательство. Пусть f осуществляет гомеоморфизм X на Y. Для каждого $x \in X$ и каждого n найдется положительное число $\delta(x, n)$, такое, что $\sigma(f(x), f(x')) < 1/n$, когда $\rho(x, x') < \delta(x, n)$ и $x' \in X$. Можно считать, что $\delta(x, n) < 1/n$. Обозначим через G_n объединение всех шаров в Z с центром в x радиуса $\delta(x, n)/2$, когда x пробегает все точки множества X. Тогда G_n открыто в Z. Пусть $z \in \bigcap_n G_n$. Для каждого n существует такая точка $x_n \in X$, что $\rho(z, x_n) < \delta(x_n, n)/2$. Так как $\delta(x_n, n) < 1/n$, то $x_n \to z$. Кроме того, для любого $m > n$

$$\rho(x_n, x_m) \leqslant \rho(z, x_n) + \rho(z, x_m) < \frac{\delta(x_n, n)}{2} + \frac{\delta(x_m, m)}{2} \leqslant$$
$$\leqslant \delta(x_n, n) \quad \text{или} \quad \delta(x_m, m).$$

Следовательно, $\sigma(f(x_n), f(x_m)) < 1/n$ при всех $m > n$ и последовательность $y_n = f(x_n)$ является последовательностью Коши в (Y, σ). Значит, она сходится к некоторой точке y. Положим $x = f^{-1}(y)$. Тогда $x \in X$ и $x_n \to x$, так как f^{-1} непрерывна. Но мы уже показали, что x_n сходится к z. Значит, $z = x$, и поэтому $z \in X$. Этим доказано, что $\bigcap_n G_n \subset X$. Обратное включение очевидно в силу определения G_n. Итак, X является G_δ-множеством в Z. ■

ГЛАВА 13

ОТОБРАЖЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ МНОЖЕСТВ В НУЛЬ-МНОЖЕСТВА

Пусть F — нигде не плотное замкнутое подмножество отрезка $I = [0, 1]$. Легко заметить, что существует гомеоморфизм h отрезка I на себя, при котором $h(F)$ будет нуль-множеством. Для этого достаточно положить $G = I \setminus F$ и взять

$$h(x) = m([0, x] \cap G)/m(G).$$

Эта строго возрастающая непрерывная функция отображает I на себя. При этом составляющие G интервалы переходят в последовательность интервалов суммарной длины 1. Значит, $h(F)$ — нуль-множество.

Обобщение этого результата на множества первой категории нельзя доказать этим же способом. Однако само утверждение верно, и мы докажем его, используя понятие категории.

Обозначим через H множество всех автоморфизмов отрезка I (т. е. гомеоморфизмов I на себя), оставляющих неподвижными концы, и введем в H метрику

$$\rho(g, h) = \max|g(x) - h(x)|.$$

Очевидно, (H, ρ) есть подпространство в пространстве $C = C[0, 1]$ непрерывных функций на I, а также в подпространстве C_1 непрерывных отображений I в R, оставляющих неподвижными точки 0 и 1. Пространство (C_1, ρ) полно, так как C_1 является замкнутым подмножеством в C. Однако пространство (H, ρ) не полно. В этом можно убедиться, рассмотрев последовательность $\{f_n\}$, где f_n — кусочно-линейная функция, график которой образован отрезками, соединяющими точку $(1/2, 1 - 1/n)$ с точками $(0, 0)$ и $(1, 1)$.

Пусть H_n — множество всех таких f из C, что $f(x) \neq f(y)$ при всех x и y из I, для которых $|x-y| \geqslant 1/n$. Если f принадлежит H_n, то число

$$\delta = \min\{|f(x) - f(y)|;\ |x-y| \geqslant 1/n\}$$

положительно. Если $\rho(f, g) < \delta/2$, то

$$|g(x)-g(y)| \geqslant |f(x)-f(y)| - 2\rho(f, g) \geqslant \delta - 2\rho(f, g) > 0,$$

когда $|x-y| \geqslant 1/n$, и, значит, g также принадлежит H_n. Это доказывает, что H_n — открытое множество в пространстве C. Очевидно,

$$H = C_1 \cap \bigcap_n H_n.$$

Значит, H является G_δ-множеством в C и, следовательно, по теореме 12.1, топологически полно. (Можно показать, что H полно по отношению к метрике

$$\sigma(g, h) = \rho(g, h) + \rho(g^{-1}, h^{-1})$$

и что эта метрика топологически эквивалентна ρ, но нам этот факт не понадобится.)

Теорема 13.1. *Для любого множества A первой категории в $I = [0, 1]$ существует $h \in H$, такое, что $h(A)$ является нуль-множеством. Более того, такие автоморфизмы образуют в H остаточное множество.*

Доказательство. Пусть $A = \bigcup_n A_n$, где A_n нигде не плотны. Положим

$$E_{n,k} = \{h \in H;\ m(h(\bar{A}_n)) < 1/k\}.$$

Для любого $h \in E_{n,k}$ ограниченное замкнутое множество $h(\bar{A}_n)$ можно покрыть таким открытым множеством G из R, что $m(G) < 1/k$. Найдется число $\delta > 0$, такое, что G содержит δ-окрестность каждой точки из $h(\bar{A}_n)$. Если $\rho(g, h) < \delta$, то $g(\bar{A}_n) \subset G$, и, значит, g принадлежит $E_{n,k}$. Отсюда следует, что $E_{n,k}$ является открытым подмножеством в H при любых n и k.

Для любого $g \in H$ и $\varepsilon > 0$ разобьем I на конечное число замкнутых подинтервалов $I_1, \ldots, I_N$ длины меньше ε. Возьмем замкнутый интервал $J_i \subset I_i^\circ \setminus g(\bar{A}_n)$ $(i = 1, \ldots, N)$, где I_i° — множество внутренних точек отрезка I_i. Пусть h_i — кусочно-линейный гомеоморфизм I_i на себя, который оставляет неподвижными концы и отображает J_i на интервал длины больше $|I_i| - 1/kN$ (график такой функции h_i можно построить из трех отрезков). Вместе эти h_i определяют такое отображение $h \in H$, что $m(h \circ g(\bar{A}_n)) < 1/k$. Значит, $h \circ g$ принадлежит $E_{n,k}$. Так как $\rho(h \circ g, g) < \varepsilon$, то отсюда получаем, что $E_{n,k}$ плотно в H. Следовательно, множество

$$E = \bigcap_{n,k} E_{n,k}$$

является остаточным в H. Если $h \in E$, то $h(\bar{A}_n)$ будет нуль-множеством при любом n. Поскольку $h(A) \subset \bigcup_n h(\bar{A}_n)$, отсюда следует, что $h(A)$ является нуль-множеством. ■

В следующей теореме даются достаточные условия справедливости противоположного утверждения:

Теорема 13.2. *Для любого несчетного замкнутого множества A, содержащегося в $I = [0, 1]$, существует такое $h \in H$, что $h(A)$ имеет положительную меру.*

Доказательство. По лемме 5.1, существуют замкнутое множество $F \subset A$ и непрерывное отображение f множества F на $[0, 1]$. Для каждого $x \in I$ положим по определению

$$h(x) = x/2 + m(f([0, x] \cap F))/2.$$

Тогда h — строго возрастающее непрерывное отображение отрезка $[0, 1]$ на себя. На каждом из открытых интервалов, составляющих множество $(0, 1) \setminus F$, справедливо равенство $h'(x) = 1/2$. Значит, $m(h(I \setminus F)) = 1/2$, и поэтому $m(h(A)) \geqslant m(h(F)) = 1/2$.

Из предыдущих теорем можно получить интересное следствие. Пусть f — ограниченная функция на

[0, 1] и D — множество ее точек разрыва. Пусть h — произвольный автоморфизм отрезка [0, 1]. Тогда суперпозиция $f \circ h$ ограничена и для нее множеством точек разрыва является $h^{-1}(D)$. Мы знаем (см. теорему 7.1), что D всегда есть F_σ-множество. Если D несчетно, оно содержит несчетное замкнутое множество. Тогда при некотором h множество $h^{-1}(D)$ имеет положительную меру. С другой стороны, если D счетно, то $h^{-1}(D)$ счетно и имеет меру нуль при любом h. Если D первой категории, то существует такое h, что $h^{-1}(D)$ — нуль-множество. С другой стороны, если D второй категории, то одно из составляющих его замкнутых множеств должно содержать интервал. В этом случае $h^{-1}(D)$ также содержит интервал и поэтому не может оказаться нуль-множеством. Вспомнив теорему 7.5 о том, что ограниченная функция R-интегрируема тогда и только тогда, когда она непрерывна почти всюду, мы получаем такое утверждение:

Теорема 13.3. *Пусть f — ограниченная функция на* [0, 1], *и пусть D — множество ее точек разрыва. Пусть h — произвольный гомеоморфизм отрезка* [0, 1] *на себя. Суперпозиция $f \circ h$ интегрируема по Риману*

(a) *при всех h тогда и только тогда, когда D не более чем счетно*;

(b) *при некотором h тогда и только тогда, когда D первой категории*;

(c) *при тождественном отображении h тогда и только тогда, когда D — нуль-множество.*

В этой теореме каждый из рассмотренных в ней σ-идеалов дает ответ на вопрос о том, какое влияние на интегрируемость по Риману оказывает строго монотонная замена переменной.

В качестве другого следствия получаем характеристику множеств первой категории, не использующую понятия нигде не плотного множества:

Теорема 13.4. *Линейное множество A является множеством первой категории тогда и только тогда, когда существует такой гомеоморфизм h прямой на* *себя, при котором $h(A)$ содержится в некотором F_σ-нуль-множестве.*

Эта теорема показывает, что характеристическим свойством множества первой категории является его топологическая эквивалентность нуль-множеству специального вида.

Доказательство. Любое множество A первой категории содержится в F_σ-множестве B первой категории. Разобьем прямую на неперекрывающиеся интервалы I_i единичной длины. Пусть h_i — автоморфизм I_i, который оставляет неподвижными концы и переводит $B \cap I_i$ в нуль-множество. Отображения h_i определяют автоморфизм h прямой, при котором $h(B)$ является нуль-множеством. Значит, $h(A)$ содержится в F_σ-нуль-множестве $h(B)$.

Обратно, пусть A — любое подмножество некоторого F_σ-нуль-множества. Тогда $A \subset \bigcup\limits_n F_n$, где F_n — замкнутое нуль-множество. Значит, каждое из множеств F_n нигде не плотно. Следовательно, A и его образ при любом автоморфизме прямой являются множествами первой категории. ■

ГЛАВА 14

ТЕОРЕМА ФУБИНИ

Линейная мера Лебега определяется с помощью покрывающей последовательности интервалов, а плоская — с помощью последовательности прямоугольников. Мы сейчас рассмотрим, как эти меры связаны между собой. Ясно, какого рода ответ здесь следует ожидать. Из элементарного анализа известно, что площадь между графиками двух функций $f \leqslant g$ вычисляется по формуле

$$\int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx.$$

Таким образом, площадь вычисляется с помощью разбиения на параллельные «дольки». Обобщение этой формулы, которое позволяет выразить меру плоского измеримого множества A в виде интеграла от линейной меры множеств, лежащих на перпендикулярах к одной из осей, называется теоремой Фубини. Мы не будем приводить теорему во всей ее общности, а ограничимся случаем, когда A является нуль-множеством. В этом случае теорема утверждает, что почти все вертикальные (или горизонтальные) линейные множества, составляющие A, имеют меру нуль.

Пусть X и Y — два непустых множества. Для любых подмножеств $A \subset X$ и $B \subset Y$ *произведение* $A \times B$ определяется как множество всех упорядоченных пар (x, y), где $x \in A$, а $y \in B$. Например, в аналитической геометрии плоскость рассматривается как произведение двух прямых. Если $E \subset X \times Y$ и $x \in X$, то множество

$$E_x = \{y;\ (x,\ y) \in E\}$$

назовем *x-сечением* E. Заметим, что E_x является подмножеством Y, а не $X \times Y$. Взятие сечения коммутирует с объединением, пересечением и дополнением, т. е.

$$(E \cup F)_x = E_x \cup F_x, \quad (E \cap F)_x = E_x \cap F_x, \quad (E')_x = (E_x)'.$$

Отсюда видно, что отображение $E \to E_x$ при любом фиксированном $x \in X$ является гомоморфизмом булевой алгебры подмножеств $X \times Y$ на алгебру подмножеств Y. Оно является гомоморфизмом даже по отношению к любым бесконечным объединениям и пересечениям, т. е.

$$\left(\bigcup_i E_i\right)_x = \bigcup_i [(E_i)_x] \quad \text{и} \quad \left(\bigcap_i E_i\right)_x = \bigcap_i [(E_i)_x].$$

Будем говорить, что множество A *бесконечно много раз покрывается* последовательностью $\{A_n\}$, если каждая его точка принадлежит бесконечному числу членов последовательности. Иногда нам будет удобно пользоваться следующей характеристикой нуль-множеств:

Лемма 14.1. *Некоторое множество A имеет нулевую меру Лебега тогда и только тогда, когда оно бесконечно много раз покрывается последовательностью интервалов I_n, для которой сходится ряд $\sum |I_n|$.*

Доказательство. Если A является нуль-множеством, то его можно покрыть последовательностью интервалов, сумма длин которых меньше 1/2, затем последовательностью с суммой меньше 1/4, затем меньше 1/8 и т. д. Вместе они образуют последовательность $\{I_n\}$, которая покрывает A бесконечно много раз и для которой $\sum |I_n| < 1$.

Обратно, если A покрывается бесконечно много раз последовательностью $\{I_n\}$, то оно покрывается и последовательностью, начинающейся с k-го члена. Если $\sum |I_n|$ сходится, то сумма $\sum_k^\infty |I_n|$ может быть сделана сколь угодно малой при соответствующем выборе k. Значит, A — нуль-множество. ■

Теорема 14.2 (Фубини). *Если E — плоское множество меры нуль, то E_x является линейным нуль-множеством для всех x, кроме некоторого множества A линейной меры нуль.*

Доказательство. Для любого $\varepsilon > 0$ пусть $I_i \times J_i$ — такая последовательность прямоугольников, что I_i и J_i полуоткрыты слева и при этом

(1) последовательность $I_i \times J_i$ бесконечно много раз покрывает множество E;

(2) $$\sum_i |I_i||J_i| \leqslant \varepsilon.$$

Дальнейшим разбиением каждого из интервалов I_i можно добиться, чтобы

(3) при каждом $i > 1$ интервал I_i содержался в единственном интервале разбиения прямой, определяемого концами интервалов $I_1, I_2, \ldots, I_{i-1}$.

Положим $\varphi_0(x) = 0$ и

$$\varphi_n(x) = \sum_{x \in I_i,\, i \leqslant n} |J_i| \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Тогда φ_i — ступенчатая функция, причем $\varphi_{i-1} \leqslant \varphi_i$ и

$$\varphi_i(x) - \varphi_{i-1}(x) = \begin{cases} |J_i| & \text{при} \quad x \in I_i, \\ 0 & \text{в остальных точках.} \end{cases}$$

Значит, в силу (2)

(4) $$\int \varphi_n \, dx = \sum_1^n \int (\varphi_i - \varphi_{i-1}) \, dx = \sum_1^n |I_i||J_i| \leqslant \varepsilon.$$

Положим

$$A_i = \{x;\ \varphi_i(x) \geqslant 1 > \varphi_{i-1}(x)\} \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Тогда A_i или пусто, или равно I_i, и при этом интервалы A_i не пересекаются. Так как $\varphi_n(x) \geqslant 1$ на A_i при $n \geqslant i$, то получаем

$$\sum_1^n |A_i| \leqslant \int \varphi_n \, dx \quad \text{при любом} \quad n,$$

и, значит, в силу (4)

$$\sum_{1}^{\infty} |A_i| \leqslant \varepsilon. \tag{5}$$

Пусть $A = \{x;\ E_x$ не есть нуль-множество$\}$. Для каждого $x \in A$ имеем $(x, y) \in E$ при некотором y, и, значит, $(x, y) \in I_i \times J_i$ для бесконечного множества значений i. Пусть $\{i_k\}$ — последовательность индексов, при которых $x \in I_{i_k}$. Если $y \in E_x$, то, в силу (1), $y \in J_{i_k}$ для бесконечного множества значений k. Таким образом, последовательность $\{J_{i_k}\}$ покрывает E_x бесконечно много раз. Так как E_x не является нуль-множеством, то ряд $\sum |J_{i_k}|$ должен расходиться. Значит, для каждого $x \in A$ имеем $\lim\limits_{n \to \infty} \varphi_n(x) = \infty$ и, следовательно, $x \in A$ при некотором i. Это показывает, что последовательность интервалов $A_1, A_2, \ldots$ покрывает множество A. Из (5) следует, что A — линейное нуль-множество. ■

Теорема 14.3. *Если E — плоское измеримое множество, то E_x измеримо как линейное множество для всех x, кроме, быть может, некоторого множества линейной меры нуль.*

Доказательство. По теореме 3.15, E можно представить как объединение F_σ-множества A и нуль-множества N. Тогда $E_x = A_x \cup N_x$ для всех x. Любое сечение замкнутого множества замкнуто, значит, A_x является F_σ-множеством при каждом x. По теореме Фубини, N_x является нуль-множеством для почти всех x. Тогда E_x измеримо для тех же x, и тем самым теорема доказана. ■

Верна теорема, обратная теореме Фубини; она утверждает, что если почти все сечения плоского измеримого множества E являются нуль-множествами, то E — нуль-множество. Мы не будем это доказывать (стандартное доказательство опирается на свойства интеграла Лебега, которые здесь не рассматривались). Заметим только, что если не предполагать заранее измеримость множества E, то утверждение становится неверным. Это видно из следующей теоремы, доказанной Серпинским.

Теорема 14.4. *Существует такое плоское множество E, что* (a) *E пересекается с каждым замкнутым множеством положительной плоской меры и* (b) *никакие три точки из E не лежат на одной прямой.*

Такое множество E не может быть измеримым. В самом деле, если бы оно было измеримо, то из утверждения (a) и теоремы 3.18 следовало бы, что его дополнение является нуль-множеством, а в таком случае свойство (b) противоречило бы теореме Фубини. Значит, E не измеримо и, следовательно, не является нуль-множеством, несмотря на то что каждое его сечение содержит не более двух точек.

Доказательство Серпинского см. *Fund. Math.*, 1, стр. 112. Здесь мы приведем упрощенный вариант доказательства, предполагающий справедливость гипотезы континуума.

Пусть класс замкнутых множеств положительной плоской меры вполне упорядочен так, что каждому элементу предшествует лишь не более чем счетное множество элементов. Если принять гипотезу континуума, то такое упорядочение возможно, так как класс замкнутых множеств положительной меры имеет мощность c. Выберем точку p_1 из первого множества F_1, затем точку p_2 из следующего множества F_2, $p_2 \neq p_1$. Затем выберем из F_3 точку p_3, не лежащую на одной прямой с p_1 и p_2. Предполагая, что из каждого множества, предшествующего множеству F_α, точки уже выбраны, выберем из F_α точку p_α, не лежащую на одной прямой с любыми двумя из уже выбранных. Индексы, меньшие α, имеет только счетное множество точек, поэтому при выборе p_α нужно учесть лишь счетное множество прямых. Объединение этих прямых имеет нулевую плоскую меру, а F_α — положительную плоскую меру. Значит, такая точка p_α действительно всегда найдется. Множество всех выбранных так точек p_α определяет множество E, обладающее свойствами (a) и (b).

ГЛАВА 15

ТЕОРЕМА КУРАТОВСКОГО — УЛАМА

Теорема Фубини имеет аналог в терминах категории. В своей наиболее общей формулировке эта теорема была доказана в 1932 г. Куратовским и Уламом [12, стр. 255].

Теорема 15.1 (Куратовский — Улам). *Если E — плоское множество первой категории, то E_x — линейное множество первой категории для всех x, кроме некоторого множества первой категории. Если E — нигде не плотное подмножество плоскости $X \times Y$, то E_x — нигде не плотное подмножество прямой Y для всех x, кроме некоторого множества первой категории на X.*

Доказательство. Эти два утверждения по существу эквивалентны. В самом деле, если $E = \bigcup_i E_i$, то $E_x = \bigcup_i (E_i)_x$. Значит, первое утверждение следует из второго. Если E нигде не плотно, то таким же будет и $\bar{E}$, и тогда E_x нигде не плотно, когда $(\bar{E})_x$ первой категории. Значит, и второе утверждение следует из первого. Итак, достаточно доказать второе утверждение для любого нигде не плотного замкнутого множества E.

Пусть $\{V_n\}$ — счетная база в Y, и пусть $G = (X \times Y) \setminus E$. Тогда G — плотное открытое подмножество плоскости. Для каждого положительного целого n обозначим через G_n проекцию $G \cap (X \times V_n)$ на X, т. е.

$$G_n = \{x;\ (x, y) \in G \text{ при некотором } y \in V_n\}.$$

Пусть $x \in G_n$ и $y \in V_n$ выбраны так, что $(x, y) \in G$. Так как G — открытое множество, то найдутся такие открытые интервалы U и V, что $x \in U$, $y \in V \subset V_n$ и $U \times V \subset G$. Тогда $U \subset G_n$. Значит, G_n — открытое подмножество на X. Для любого непустого открытого множества U множество $G \cap (U \times V_n)$ не пусто, так как G плотно на плоскости. Значит, G_n содержит точки из U. Отсюда видно, что G_n при любом n является плотным открытым подмножеством в X. Следовательно, множество $\bigcap_n G_n$ есть дополнение к множеству первой категории в X. Для любой точки $x \in \bigcap_n G_n$ сечение G_x содержит точки из V_n при всех n. Значит, G_x — плотное открытое подмножество в Y, и, следовательно, $E_x = Y \setminus G_x$ нигде не плотно. Тем самым доказано, что E_x нигде не плотно для всех x, кроме множества первой категории. ■

Это доказательство, как и доказательство трех следующих теорем, применимо к декартову произведению $X \times Y$ любых двух топологических пространств при единственном условии, что Y имеет счетную базу. На самом деле достаточно предположить лишь, что существует такая последовательность непустых открытых множеств из Y, что каждое непустое открытое множество содержит какой-нибудь из членов этой последовательности.

Теорема 15.2. *Если E — подмножество из $X \times Y$, обладающее свойством Бэра, то E_x обладает свойством Бэра при всех x, кроме множества первой категории на X.*

Доказательство. Пусть $E = G \triangle P$, где G — открытое множество, а P — множество первой категории. Тогда $E_x = G_x \triangle P_x$ при всех x. Каждое сечение открытого множества открыто, поэтому E_x обладает свойством Бэра, когда P_x первой категории. А это, в силу теоремы 15.1, выполняется для всех x, кроме множества первой категории. ■

Теорема 15.3. *Произведение $A \times B$ является множеством первой категории в $X \times Y$ тогда и только тогда, когда по крайней мере одно из множеств A или B первой категории.*

Доказательство. Если G — плотное открытое подмножество в X, то $G \times Y$ — плотное открытое подмножество в $X \times Y$. Значит, $A \times B$ нигде не плотно в $X \times Y$, если A нигде не плотно в X. Так как $\left(\bigcup_i A_i\right) \times B = \bigcup_i (A_i \times B)$, то $A \times B$ — множество первой категории, если A первой категории. Такие же рассуждения применимы к B.

Обратно, если $A \times B$ — множество первой категории, а A таковым не является, то, по теореме 15.1, найдется такая точка x из A, что $(A \times B)_x$ первой категории. Так как $(A \times B)_x = B$ при всех x из A, то B первой категории. ∎

Следующая теорема представляет собой частичное обращение теоремы 15.1.

Теорема 15.4. *Если E — подмножество из $X \times Y$, обладающее свойством Бэра, и E_x — множество первой категории при всех x, кроме множества первой категории, то E является множеством первой категории.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда $E = G \triangle P$, где P — множество первой категории, а G — открытое множество второй категории. Найдутся открытые множества U и V, такие, что $U \times V \subset G$, причем $U \times V$ — множество второй категории. (В случае плоскости это ясно. В общем случае это вытекает из рассмотренной в следующей главе теоремы Банаха о категории.) По теореме 15.3, как U, так и V являются множествами второй категории. При всех x из U имеем $E_x \supset V \setminus P_x$. По теореме 15.1, P_x первой категории при всех x, кроме множества первой категории. Значит, E_x — множество второй категории для всех x из U, кроме множества первой категории. Отсюда следует, что E_x является множеством второй категории для всех x из некоторого множества второй категории, что противоречит условию. ∎

Теорема 15.4 без первого условия неверна; это вытекает из следующего аналога теоремы 14.4:

Теорема 15.5. *Существует плоское множество E второй категории, никакие три точки которого не лежат на одной прямой.*

Доказательство. Класс плоских G_δ-множеств второй категории имеет мощность c. Его можно вполне упорядочить и записать в виде $\{E_\alpha; \alpha < \omega_c\}$, где ω_c — первое из порядковых чисел, которым предшествует c порядковых чисел. Предположим, что для всех $\beta < \alpha$ выбраны такие точки $p_\beta \in E_\beta$, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Так как множество всех прямых, соединяющих пары точек p_β при $\beta < \alpha$, имеет мощность, меньшую c, то можно найти направление, не параллельное ни одной из этих прямых. По теореме 15.4, некоторая прямая, параллельная этому направлению, пересекает E_α по множеству второй категории и, значит, в силу леммы 5.1, по множеству мощности c. Поэтому мы сможем так выбрать p_α из E_α, что p_α не будет лежать на одной прямой ни с какими двумя точками p_β, где $\beta < \alpha$. В множестве всех выбранных таким образом точек p_β никакие три точки не лежат на одной прямой. Это множество второй категории, так как его дополнение не содержит никакого G_δ-множества второй категории. ∎

Аналогия между утверждениями теоремы Фубини и теоремы Куратовского — Улама выдвигает интересный вопрос: нельзя ли одно из этих утверждений свести к другому? Мы покажем, что теорему Куратовского — Улама можно в определенном смысле свести к теореме Фубини. Сведение ограничивается случаем плоского множества; при этом оно не приводит ни к каким упрощениям. Основной интерес представляет сам метод сведения и возникающая при этом задача: найти преобразование плоскости, которое сведет любой данный случай теоремы Куратовского — Улама к теореме Фубини. Подобное сведение теоремы Фубини к теореме Куратовского — Улама не представляется возможным.

В гл. 13 было показано, что любое линейное множество первой категории можно отобразить в нуль-множество с помощью некоторого автоморфизма прямой. Можно показать, что любое множество первой категории в r-мерном пространстве также допускает отображение в множество меры нуль при некотором автоморфизме пространства [21]. Впервые это доказал в 1919 г. (для подмножеств квадрата) Брауэр [6]. Однако этот результат еще не подходит для нашей задачи, поскольку такое отображение не обязано переводить сечение в сечение. Нам требуется усиленный вариант теоремы Брауэра, утверждающий, что автоморфизм плоскости можно взять в виде *произведения отображений* $f \times g$, т. е. в виде $x' = f(x)$, $y' = g(y)$. Мы установим существование такого автоморфизма методом категорий, подобным использованному в одномерном случае.

В дальнейшем m_2 и m будут обозначать соответственно плоскую и линейную меры Лебега.

Теорема 15.6. *Для любого плоского множества E первой категории, расположенного в единичном квадрате, существует представимый в виде произведения гомеоморфизм h единичного квадрата на себя, при котором $m_2(h(E)) = 0$.*

Доказательство. Как и в гл. 13, пусть (H, ρ) обозначает пространство автоморфизмов единичного интервала, оставляющих неподвижными его концы. Пусть H^2 — множество всех автоморфизмов единичного квадрата, представимых в виде $f \times g$, где f и g принадлежат H. Множество H^2 можно отождествить с декартовым произведением $H \times H$. Если $h_1 = f_1 \times g_1$ и $h_2 = f_2 \times g_2$, то положим по определению

$$\sigma(h_1, h_2) = \rho(f_1, f_2) + \rho(g_1, g_2).$$

Легко проверить, что (H^2, σ) — метрическое пространство, причем оно топологически полно (любая другая метрика в H определяет соответствующую метрику в H^2).

Пусть F — нигде не плотное замкнутое подмножество единичного квадрата. Для каждого положительного целого k положим

$$E_k = \{h \in H^2;\ m_2(h(F)) < 1/k\}.$$

Из тех же соображений, что и при доказательстве теоремы 13.1, видно, что E_k является открытым подмножеством в H^2. Чтобы доказать его плотность, для любого положительного ε выберем $n > 2/\varepsilon$ и разделим единичный интервал на n равных замкнутых подинтервалов

$$I_i = [(i-1)/n,\ i/n] \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Пусть $F_{ij} = F \cap (I_i \times I_j)$, и пусть T_{ij} обозначает сдвиг

$$x' = x - (i-1)/n, \quad y' = y - (j-1)/n.$$

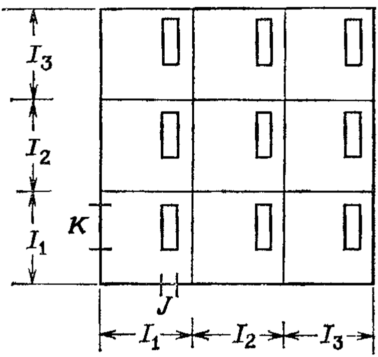
Тогда конечное объединение $\bigcup\limits_{i,j} T_{ij}(F_{ij})$ представляет собой нигде не плотное подмножество в $I_1 \times I_1$. Выберем внутри I_1 такие отрезки J и K, что

$$J \times K \subset (I_1 \times I_1) \setminus \bigcup_{i,j} T_{ij}(F_{ij}).$$

Тогда

$$[(i-1) + J] \times [(j-1) + K] \subset (I_i \times I_j) \setminus F.$$

В каждом из квадратов $I_i \times I_j$ имеются одинаково расположенные прямоугольнички, свободные от F. Для случая $n = 3$ это выглядит так:



Пусть f — кусочно-линейный автоморфизм отрезка I_1, оставляющий неподвижными концы, при котором

$$m(f_1(J)) > \sqrt{1 - 1/k}\ m(I_1)$$

(достаточно трех линейных участков). Аналогично пусть g_1 — кусочно-линейный автоморфизм отрезка I_1, оставляющий неподвижными концы, при котором

$$m(g_1(K)) > \sqrt{1-1/k}\; m(I_1).$$

Положим

$$f_i(x) = \frac{i-1}{n} + f_1\left(x - \frac{i-1}{n}\right) \quad \text{при} \quad x \in I_i$$

и

$$g_j(y) = \frac{j-1}{n} + g_1\left(y - \frac{j-1}{n}\right) \quad \text{при} \quad y \in I_j.$$

Отображения f_i $(i = 1, \ldots, n)$ вместе определяют кусочно-линейное отображение $f \in H$. Аналогично отображения g_j определяют отображение $g \in H$. Произведение $f \times g$ переводит каждый квадрат $I_i \times I_j$ на себя, и, значит, $f \times g$ находится от тождественного отображения на расстоянии меньше ε. Кроме того, $m_2(h(F)) < 1/k$, так как та часть F, которая содержится в $I_i \times I_j$, отображается на множество меры меньше $1/kn^2$. Таким образом, при любом нигде не плотном замкнутом множестве F ε-окрестность в H^2 тождественного отображения содержит точки из E_k. Если этот результат применить к множеству $\varphi(F)$, где φ — произвольный элемент из H^2, то получится такой элемент $h \in H^2$, что $m_2(h \circ \varphi(F)) < 1/k$ и $\sigma(h \circ \varphi, \varphi) < \varepsilon$. Это доказывает, что E_k не только открыто, но и плотно в H^2.

Если E — любое множество первой категории в единичном квадрате, то $E \subset \bigcup\limits_i F_i$, где F_i замкнуты и нигде не плотны. Для любых двух положительных целых i и k положим

$$E_{ik} = \{h \in H^2;\; m_2(h(F_i)) < 1/k\}.$$

Мы уже показали, что E_{ik} — плотные открытые подмножества топологически полного пространства H^2. Значит, существует элемент $h \in \bigcap\limits_{i,k} E_{ik}$. Для любого такого автоморфизма h справедливо равенство $m_2(h(E))=0$. ■

Теорема 15.7. *Для любого плоского множества E первой категории существует представимый в виде произведения гомеоморфизм h плоскости на себя, при котором $m_2(h(E))=0$.*

Доказательство. Пусть $f(x)=\operatorname{tg}\pi(x-{}^1/_2)$ $(0<x<1)$. Тогда f — гомеоморфизм интервала $(0, 1)$ на прямую. Произведение $g=f\times f$ отображает внутренность единичного квадрата на плоскость. Так как f' непрерывна и положительна, то как g, так и g^{-1} отображают нуль-множества на нуль-множества. Если E — множество первой категории на плоскости, то $g^{-1}(E)$ — множество первой категории в квадрате. По теореме 15.6, существует такой автоморфизм $h\in H^2$, что $h\circ g^{-1}(E)$ является нуль-множеством. Тогда $g\circ h\circ g^{-1}$ — автоморфизм плоскости, представимый в виде произведения одномерных отображений и переводящий E в нуль-множество. ■

Теперь легко свести теорему Куратовского — Улама к теореме Фубини. Пусть E — нигде не плотное замкнутое подмножество плоскости. Тогда каждое сечение E_x или нигде не плотно, или содержит интервал. Пусть V_1, V_2, ... — последовательность всех открытых интервалов с рациональными концами. Положим $F_i=\{x;\ E_x\supset V_i\}$; F_i — замкнутое подмножество прямой, так как каждое горизонтальное сечение $E^y=\{x;\ (x, y)\in E\}$ множества E замкнуто, а $F_i=\bigcap\limits_{y\in V_i} E^y$. Тогда F_σ-множество $A=\bigcup\limits_i F_i$ совпадает с множеством всех точек x, для которых E_x не является множеством первой категории.

Пусть $h=f\times g$ — представленный в виде произведения гомеоморфизм плоскости на себя, при котором $m_2(h(E))=0$ (теорема 15.7). Для каждой точки x из A сечение E_x содержит некоторый интервал V_i. Сечение $(h(E))_{f(x)}$ содержит интервал $g(V_i)$ и, значит, не является нуль-множеством. Следовательно, $f(A) \subset B$, где

$$B = \{x;\ (h(E))_x \text{ не есть нуль-множество}\}.$$

По теореме Фубини, $m(B) = 0$. Таким образом, $f(A)$ является F_σ-множеством меры нуль. Поэтому $f(A)$, а значит, и A является множеством первой категории в силу теоремы 13.4.

ГЛАВА 16

ТЕОРЕМА БАНАХА О КАТЕГОРИИ

Очевидно, что в топологическом пространстве со счетной базой объединение любого семейства открытых множеств первой категории является множеством первой категории: надо лишь взять объединение тех элементов базы, которые содержатся по крайней мере в одном из множеств данного семейства. Такое же рассуждение показывает, что объединение любого семейства открытых множеств меры нуль имеет меру нуль (при любой мере, определенной на всех открытых множествах). Интересно отметить, что первое утверждение остается верным независимо от того, имеет пространство счетную базу или не имеет. Перенос на общий случай второго утверждения требует некоторого уточнения.

Теорема 16.1 (теорема Банаха о категории). *В топологическом пространстве X объединение любого семейства открытых множеств первой категории также является множеством первой категории.*

Доказательство. Пусть G — объединение семейства $\mathscr{G}$ непустых открытых множеств первой категории. Пусть $\mathscr{F} = \{U_\alpha;\ \alpha \in A\}$ — максимальное семейство непересекающихся непустых открытых множеств, каждое из которых содержится в каком-нибудь из членов семейства $\mathscr{G}$. Тогда замкнутое множество $\bar{G} \setminus \bigcup \mathscr{F}$ нигде не плотно (иначе $\mathscr{F}$ не было бы максимальным). Каждое из множеств U_α можно представить в виде счетного объединения нигде не плотных множеств, скажем $U_\alpha = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} N_{\alpha, n}$. Положим $N_n = \bigcup\limits_{\alpha \in A} N_{\alpha, n}$. Если открытое множество U пересекается с N_n, то оно пересекается с каким-то из $N_{\alpha, n}$, и поэтому найдется непустое открытое множество $V \subset (U \cap U_\alpha) \setminus N_{\alpha, n}$. Отсюда вытекает, что $V \subset U \setminus N_n$, и поэтому N_n нигде не плотно. Следовательно, множество

$$G \subset (\bar{G} \setminus \bigcup \mathscr{F}) \cup \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = (\bar{G} \setminus \bigcup \mathscr{F}) \cup \bigcup_1^\infty N_n$$

есть множество первой категории. ■

Отсюда следует, что любое топологическое пространство является объединением открытого (или замкнутого) подпространства Бэра и множества первой категории. Чтобы обсудить аналог теоремы 16.1 для открытых множеств меры нуль, нам понадобится лемма, принадлежащая Монтгомери [12, стр. 368].

Лемма 16.2 (Монтгомери). *Пусть $\{G_\alpha; \alpha \in A\}$ — вполне упорядоченное семейство открытых подмножеств метрического пространства X, и пусть (для каждого $\alpha \in A$) F_α — замкнутое подмножество множества*

$$H_\alpha = G_\alpha \setminus \bigcup_{\beta < \alpha} G_\beta.$$

Тогда $E = \bigcup_{\alpha \in A} F_\alpha$ является F_σ-множеством.

Доказательство. Для каждого $\alpha \in A$ и каждого положительного целого n положим

$$F_{\alpha, n} = \{x \in F_\alpha;\ d(x, X \setminus G_\alpha) \geqslant 1/n\}.$$

Тогда $F_{\alpha, n}$ — замкнутое множество и $F_\alpha = \bigcup_{n=1}^\infty F_{\alpha, n}$. Если $\alpha \neq \beta$, то $\rho(x, y) \geqslant 1/n$ для любого $x \in F_{\alpha, n}$ и $y \in F_{\beta, n}$. Значит, любая сходящаяся последовательность, которая содержится в множестве $F_n = \bigcup_{\alpha \in A} F_{\alpha, n}$, должна вся, кроме, быть может, конечного числа членов, содержаться в одном и том же множестве $F_{\alpha, n}$. Значит, F_n замкнуто, и поэтому

$$E = \bigcup_{\alpha \in A} F_\alpha = \bigcup_{n=1}^\infty F_n$$

является F_σ-множеством. ■

В соответствии с определением, введенным Марчевским и Сикорским [14, 15], которым принадлежит и доказанная ниже теорема, будем говорить, что кардинальное число (или мощность) имеет *меру нуль*, если любая конечная мера, заданная на всех подмножествах некоторого множества, имеющего мощность, равную этому кардинальному числу, тождественно обращается в нуль, когда она равна нулю для каждой отдельной точки. Очевидно, что любое кардинальное число, меньшее кардинального числа меры нуль, также имеет меру нуль. Как мы уже упоминали в гл. 5, известно, что любое кардинальное число, меньшее первого слабо недостижимого кардинального числа, имеет меру нуль и что (в предположении справедливости гипотезы континуума) только очень большие кардинальные числа могут не быть меры нуль.

Мера μ, определенная на классе борелевских подмножеств пространства X, называется *борелевской мерой*. Она называется *нормированной*, если $\mu(X) = 1$, и *неатомической* (*рассеянной*), если она равна нулю для одноточечных подмножеств.

Теорема 16.3. *Пусть μ — конечная борелевская мера в метрическом пространстве X. Пусть G — объединение семейства $\mathcal{G}$ открытых множеств меры нуль. Если мощность $\mathcal{G}$ имеет меру нуль, то $\mu(G) = 0$.*

Доказательство. Запишем семейство $\mathcal{G}$ в виде вполне упорядоченного семейства $\{G_\alpha;\ \alpha \in A\}$ и положим $H_\alpha = G_\alpha \setminus \bigcup_{\beta<\alpha} G_\beta$ для любого $\alpha \in A$. Каждое из множеств H_α, будучи разностью двух открытых множеств, является F_σ-множеством, и поэтому его можно представить в виде $H_\alpha = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_{\alpha, n}$, где $F_{\alpha, n}$ замкнуты. Для любого множества $E \subset A$ имеем

$$\bigcup_{\alpha\in E} H_\alpha = \bigcup_{\alpha\in E} \bigcup_{n=1}^{\infty} F_{\alpha, n} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\bigcup_{\alpha\in E} F_{\alpha, n} \right].$$

По лемме Монтгомери (положим $F_\alpha = \varnothing$ при $\alpha \in A \setminus E$), множество в скобках при любом n является F_σ-множеством и, следовательно, таким же будет и объединение. Значит, функция множества

$$\nu(E)=\mu\left(\bigcup_{\alpha\in E} H_\alpha\right)$$

определена на всех подмножествах из A. Она, очевидно, является конечной и неатомической мерой. Так как мощность A имеет меру нуль, то отсюда получаем, что $\mu(G)=\mu\left(\bigcup_{\alpha\in A} H_\alpha\right)=\nu(A)=0$. ■

Теорема 16.4. *Если X — метрическое пространство с базой мощности меры нуль и μ — конечная борелевская мера в X, то объединение любого семейства открытых множеств меры нуль имеет меру нуль.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{B}$ — база, мощность которой имеет меру нуль. Для любого семейства $\mathscr{G}$ открытых множеств меры нуль пусть $\mathscr{B}_0$ — множество всех тех элементов из $\mathscr{B}$, которые содержатся в каком-нибудь члене из $\mathscr{G}$. Тогда $\mu\left(\bigcup\mathscr{G}\right)=\mu\left(\bigcup\mathscr{B}_0\right)=0$ по теореме 16.3. ■

Как это ни удивительно, теорема 16.4 может оказаться неверной для мер в неметризуемых пространствах. Кемперман и Магарам [11] показали, что в декартовом произведении X, полученном в результате c-кратного перемножения прямой, на σ-алгебре, порожденной элементарными открытыми множествами, можно определить такую нормированную меру μ, что X допускает покрытие семейством открытых множеств меры нуль. Элементарные открытые множества образуют базу мощности c, а c, по теореме 5.6, имеет меру нуль (в предположении справедливости гипотезы континуума).

Следующая теорема представляет собой, пожалуй, наиболее широкое обобщение теоремы 1.6.

Теорема 16.5. *Пусть X — метрическое пространство, мощность базы которого имеет меру нуль. Пусть μ — такая неатомическая борелевская мера в X, что*

(i) *каждое множество бесконечной меры обладает подмножеством положительной конечной меры;*

(ii) *каждое множество меры нуль содержится в некотором G_δ-множестве меры нуль.*

Тогда X можно представить как объединение G_δ-множества меры нуль и множества первой категории.

Доказательство. Выбирая по точке из каждого члена данной базы, мы получим плотное множество S, мощность которого не превосходит мощности базы. Для каждого положительного целого n обозначим через F_n максимальное подмножество в S, для любых двух различных точек x, y которого $\rho(x, y) \geqslant 1/n$. Положим $D = \bigcup\limits_{1}^{\infty} F_n$. Тогда D плотно в X, а так как каждое подмножество из F_n замкнуто, то каждое подмножество из D является F_σ-множеством. Значит, μ определена для всех подмножеств из D. Поскольку μ обращается в нуль на одноточечных множествах и мощность D имеет меру нуль, то мера ни одного из подмножеств D не может быть положительной и конечной. Значит, в силу (i) и (ii), $\mu(D) = 0$ и D содержится в G_δ-множестве E, для которого $\mu(E) = 0$. Дополнение к E есть множество первой категории. ■

Ограничение на мощность существенно. В самом деле, если существует множество X, мощность которого не имеет меру нуль, его можно метризовать, положив $\rho(x, y) = 1$ для $x \neq y$. Тогда все подмножества в X открыты и нетривиальная конечная мера, определенная для всех подмножеств в X и равная нулю для одноточечных множеств, будет борелевской мерой, удовлетворяющей условиям (i) и (ii), однако для нее заключение теоремы неверно.

Легко проверить, что любая конечная борелевская мера в метрическом пространстве удовлетворяет условиям (i) и (ii). (Класс борелевских множеств, для каждого из которых имеется содержащееся в нем F_σ-множество и покрывающее его G_δ-множество одинаковой меры, представляет собой σ-алгебру, включающую в себя все замкнутые множества.) Однако эти условия в теореме 16.5 опустить нельзя; в этом можно убедиться, рассмотрев борелевскую меру μ на R, определенную так: $\mu(E) = m(E)$ для каждого борелевского множества E первой категории и $\mu(E) = \infty$ для каждого борелевского множества второй категории.

ГЛАВА 17

ТЕОРЕМА ПУАНКАРЕ О ВОЗВРАЩЕНИИ

Во время своих занятий небесной механикой Пуанкаре открыл теорему, замечательную по своей простоте и весьма важным следствиям. Она заслуживает упоминания еще и потому, что именно эта теорема положила начало современному учению о преобразованиях, сохраняющих меру, известному как эргодическая теория. Для нас эта «теорема о возвращении» особенно интересна потому, что при ее доказательстве Пуанкаре предвосхитил как понятие меры, так и понятие категории. Его труд «Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste» [23] появился несколько раньше, чем были введены эти понятия.

Пусть X — ограниченная открытая область в r-мерном пространстве, и пусть T — гомеоморфизм X на себя, сохраняющий объем, т. е. такой, что G и $T(G)$ имеют равные объемы для любого открытого множества $G \subset X$. При многократном применении T каждая точка x порождает последовательность x, Tx, T^2x, ..., T^ix, ..., называемую *положительной полуорбитой* x. Точка x открытого множества G называется *возвращающейся относительно* G, если T^ix принадлежит G для бесконечного множества положительных целых значений i. Фактически Пуанкаре доказал две теоремы, которые можно объединить и сформулировать так:

Теорема 17.1. *Для любого открытого множества $G \subset X$ точками, возвращающимися относительно G, являются все точки G, кроме некоторого множества первой категории меры нуль.*

Утверждение о категории можно извлечь из самого метода доказательства, которым пользовался Пуанкаре. Он начал с того, что доказал плотность в G множества возвращающихся точек. При доказательстве строится последовательность вложенных областей; этот процесс по существу равносилен доказательству теоремы Бэра для данного случая. Поскольку никакого труда не составляет доказать, что возвращающиеся относительно G точки образуют G_δ-множество, то утверждение о категории можно с полным правом считать принадлежащим Пуанкаре, хотя он явно его и не высказал. Эта часть рассуждений Пуанкаре была затем существенно обобщена и расширена Биркгофом [3, гл. 7]. Утверждение о категории в явном виде было сформулировано Хильми [35].

Утверждение о мере в теореме 17.1 было высказано Пуанкаре в терминах «вероятности». В этой части доказательства он молчаливо предполагал счетную аддитивность «вероятности», хотя это свойство и не было в то время должным образом обосновано. Однако на базе современной теории меры все детали доказательства звучат безукоризненно. В современной терминологии оно было воспроизведено Каратеодори [10].

Более внимательный анализ рассуждений Пуанкаре показывает, что предположение о сохранении объемов на самом деле не существенно. В первой части доказательства оно используется лишь для того, чтобы исключить возможность существования такого открытого множества, образы которого попарно не пересекаются, а во второй части оно служит только для того, чтобы исключить существование множества положительной меры с тем же свойством. Более того, нет необходимости требовать, чтобы T было взаимно однозначным. Освобожденные от этих несущественных деталей обе части теоремы Пуанкаре можно включить в одну абстрактную теорему о возвращении, которую мы сейчас сформулируем и докажем.

Рассмотрим некоторое множество X и σ-кольцо S его подмножеств; пусть, кроме того, I есть σ-идеал в S. Отображение T множества X в себя называется *S-измеримым*, если $T^{-1}E \in S$ для любых $E \in S$. Множество $E \subset X$ назовем *блуждающим*, если множества E, $T^{-1}E$, $T^{-2}E$, ... попарно не пересекаются. Отображение T назовем *рассеивающим* (*диссипативным*), если существует блуждающее множество, принадлежащее $S \setminus I$; в противном случае T будет *нерассеивающим*. Для любого множества $E \subset X$ обозначим через $D(E)$ множество таких точек x из E, что $T^i x \in E$ лишь для конечного числа положительных целых i. Будем говорить, что T обладает *свойством рекуррентности*, если $D(E) \in I$ для каждого $E \in S$.

Теорема 17.2. *Некоторое S-измеримое отображение T множества X в себя обладает свойством рекуррентности тогда и только тогда, когда оно не является рассеивающим.*

Доказательство. Пусть T не является рассеивающим. Рассмотрим любое $E \in S$ и положим $F = E \setminus \bigcup_{1}^{\infty} T^{-k}E$. Так как T S-измеримо, а S есть σ-кольцо, то $F \in S$. Для любых целых $0 \leqslant i < j$ имеем

$$T^{-j}F \cap T^{-i}F \subset T^{-j}E \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} T^{-i-k}E = \varnothing.$$

Это доказывает, что F и каждое из множеств $T^{-k}F$ $(k = 1, 2, \ldots)$ являются блуждающими. Так как все эти множества принадлежат S, а T не является рассеивающим, то $T^{-k}F \in I$ при всех $k \geqslant 0$. Поскольку I является σ-идеалом, ему принадлежит объединение $\bigcup_{0}^{\infty} T^{-k}F$, а также и множество $H = E \cap \bigcup_{0}^{\infty} T^{-k}F$. Но T^{-k} состоит из всех таких точек x, что $T^k x \in E$ и $T^i x \in X \setminus E$ при всех $i > k$. Значит, $H = D(E)$. Таким образом, мы показали, что $D(E) \in I$ для любого $E \in S$, т. е. T обладает свойством рекуррентности.

Обратно, если T — рассеивающее отображение, то существует блуждающее множество E, принадлежащее $S \setminus I$. Тогда $D(E) = E$, и мы получаем, что $E \in S$, но $D(E) \notin I$. Это показывает, что T не обладает свойством рекуррентности. ■

Оба утверждения теоремы 17.1 следуют из теоремы 17.2. Сначала предположим, что T — взаимно однозначное сохраняющее меру преобразование ограниченной открытой области X r-мерного пространства на себя. В качестве S возьмем σ-алгебру измеримых подмножеств X, а в качестве I возьмем σ-идеал нуль-множеств. Тогда T S-измеримо. Так как мера X конечна, любое измеримое блуждающее множество должно быть нуль-множеством и, значит, T не является рассеивающим. Следовательно, T обладает свойством рекуррентности. Это означает, что почти все точки любого измеримого множества E возвращаются в E бесконечно много раз при многократном применении T. В частности, для любого открытого множества $G \subset X$ все его точки, кроме точек множества меры нуль, являются возвращающимися относительно G.

Предположим теперь, что T — такой гомеоморфизм метрического пространства X на себя, что никакое непустое открытое множество не является блуждающим (так будет, например, если X — ограниченное открытое подмножество r-мерного пространства, а T сохраняет объем). Возьмем в качестве S σ-алгебру подмножеств из X, обладающих свойством Бэра, а в качестве I σ-идеал множеств первой категории в X. Тогда T S-измеримо. По теореме Банаха о категории существует наибольшее открытое множество H первой категории. Пусть $Y = X \setminus \bar{H}$. Тогда любое непустое открытое подмножество в Y будет второй категории. Очевидно, что H, а значит, и Y инвариантны относительно T. Пусть E — некоторое блуждающее множество, обладающее свойством Бэра. Тогда $E = G \triangle P$, где G открыто, а P первой категории. Можно считать, что $G \subset Y$. Для любых целых $0 \leqslant i < j$ имеем $T^{-i}E \cap T^{-j}E = \varnothing$, откуда следует, что

$$T^{-i}G \cap T^{-j}G = \\ = (T^{-i}P \cap T^{-j}G) \triangle (T^{-i}G \cap T^{-j}P) \triangle (T^{-i}P \cap T^{-j}P) \subset \\ \subset T^{-i}P \cup T^{-j}P.$$

Значит, $T^{-i}G \cap T^{-j}G$ — открытое подмножество из Y первой категории, поэтому оно пусто. Тогда G оказывается открытым блуждающим множеством. Поэтому и оно должно быть пустым. Этим доказано, что любое блуждающее множество, обладающее свойством Бэра, является множеством первой категории. Таким образом, T не является рассеивающим и, значит, обладает свойством рекуррентности. Это означает, что если E обладает свойством Бэра, то все точки E, кроме множества первой категории, возвращаются в E бесконечно много раз при многократном применении T. В частности, для любого открытого множества $G \subset X$ все точки из G, кроме множества первой категории, являются возвращающимися относительно G.

Теорему 17.1 иногда называют теоремой Пуанкаре о возвращении, но это название правильнее относить к теореме, которую мы сейчас выведем. Нам понадобится новое определение. Точка x называется *возвращающейся точкой* отображения T, если она является возвращающейся относительно каждой своей окрестности. (Пуанкаре называл такие точки «устойчивыми по Пуассону».)

Теорема 17.3 (теорема Пуанкаре о возвращении). *Если T — сохраняющий меру гомеоморфизм ограниченной открытой области X r-мерного пространства на себя, то все точки X, кроме точек множества первой категории меры нуль, являются возвращающимися точками гомеоморфизма T.*

Доказательство. Пусть $U_1, U_2, \ldots$ — счетная база для X. Пусть E_k — множество таких точек x из U_k, что $T^i x \in U_k$ не более чем для конечного числа значений i. По теореме 17.1, каждое из множеств E_k является нуль-множеством первой категории. Значит, и $E = \bigcup_1^\infty E_k$ — также нуль-множество первой категории. Если $x \in X \setminus E$ и если U — произвольная окрестность точки x, то $x \in U_k \subset U$ при некотором k, причем $x \notin E_k$. Значит, $T^i x \in U$ для бесконечного множества целых положительных значений i. Следовательно, каждая точка из $X \setminus E$ является возвращающейся точкой отображения T. ∎

Эта теорема играет важную роль в теории динамических систем, и вот почему. В классической механике конфигурация системы описывается конечным набором координат $q_1, q_2, \ldots, q_N$. «Состояние» системы определяется мгновенными значениями этих координат и соответствующих компонент импульсов $p_1, p_2, \ldots, p_N$. Эти $2N$ значений задают точку в $2N$-мерном пространстве. Такие точки образуют *фазовое пространство* системы. Точки фазового пространства представляют все возможные состояния системы. Когда состояние системы меняется во времени в соответствии с управляющими системой уравнениями движения, отвечающая этому состоянию точка описывает некоторый путь в фазовом пространстве. За единицу времени начальная точка x в фазовом пространстве переместится в некоторую точку Tx. Таким образом, уравнения движения определяют преобразование T фазового пространства в себя. Из фундаментальной теоремы существования и единственности решения системы дифференциальных уравнений следует, что T является гомеоморфизмом при условии достаточной гладкости входящих в уравнения членов. Более того, уравнения Ньютона, записанные в соответствующих координатах и импульсах (в гамильтоновой форме), определяют преобразование T, сохраняющее $2N$-мерную меру. Этот факт известен как *теорема Лиувилля* (того самого Лиувилля, о котором мы упоминали в гл. 2): для так называемых консервативных систем полная энергия постоянна. Отсюда следует, что T преобразует любую поверхность постоянной энергии в себя. Для некоторых систем можно показать, что часть фазового пространства, где энергия заключена в соответствующих пределах, является ограниченной открытой областью $2N$-мерного пространства. Тогда из теоремы 17.3 вытекает, что для почти всех начальных состояний (в смысле меры или категории) система будет бесконечно много раз возвращаться к положениям, сколь угодно близким к начальному состоянию. Пуассон пытался установить такого рода устойчивость в «ограниченной проблеме трех тел» путем нестрогих рассуждений, основанных на неких разложениях в ряд. Пуанкаре строго обосновал свои выводы, используя принципиально новые методы. Это был один из первых триумфов современной «качественной» теории дифференциальных уравнений, начало которой положил Пуанкаре.

Последующее развитие теории сохраняющих меру преобразований показало, что теорему Пуанкаре можно существенно улучшить. Так, эргодическая теорема Дж. Д. Биркгофа (1931 г.) утверждает, что при сохраняющем меру отображении множества конечной меры на себя почти все точки любого измеримого множества E не только возвращаются в E бесконечно много раз, но это происходит с частотой, стремящейся к определенному положительному пределу. Точнее говоря, если χ_E — характеристическая функция множества E, то предельная частота

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \chi_E(T^i x)$$

существует и положительна для почти всех x из E. Очевидно, что этот результат намного шире теоремы 17.1. Любопытно, что такое уточнение теоремы Пуанкаре, вообще говоря, не верно в терминах категории; множество точек, где $f(x)$ определена, может быть лишь первой категории. Аналогия между мерой и категорией сохраняется здесь довольно долго, но в конце концов нарушается.

ГЛАВА 18

ТРАНЗИТИВНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Мы привели много иллюстраций метода категорий, но в большинстве случаев он служил лишь для того, чтобы дать новое, иногда более простое доказательство существования объектов, для которых это существование было уже известно заранее. Так, числа Лиувилля, нигде не дифференцируемые непрерывные функции, брауэровское преобразование квадрата были известны еще до того, как появился метод категорий. Поэтому интересно рассмотреть проблему, решение которой было впервые получено методом категорий.

Проблема 18.1. Найти такой гомеоморфизм T замкнутого единичного квадрата на себя, при котором положительная полуорбита x, Tx, T^2x, ... некоторой точки x плотна в квадрате.

Автоморфизм T топологического пространства X называется *транзитивным*, если существует точка x, орбита которой $\{T^n x;\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ плотна в X. Когда X — полное сепарабельное метрическое пространство без изолированных точек, из существования такой точки x следует, что точки, у которых плотны положительные полуорбиты, образуют остаточное множество в X. В самом деле, пусть $\{U_i\}$ — счетная база; положим

$$G_j = \bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n} U_j \quad (j = 1, 2, \ldots)$$

и

$$E = \bigcap_{j=1}^{\infty} G_j.$$

Заметим, что $x \in E$ тогда и только тогда, когда положительная полуорбита x плотна в X. Для любых двух положительных целых чисел i и j либо $T^n U_i \cap U_j \neq$

$\neq \varnothing$, либо $T^n U_j \cap U_i \neq \varnothing$ при некотором целом $n \geqslant 0$. В последнем случае множеству $T^n U_j \cap U_i$ принадлежат одновременно некоторое x и $T^m x$ при некотором $m > n$, так как каждое непустое открытое множество содержит бесконечно много точек любой плотной орбиты. В любом случае $U_i \cap G_j \neq \varnothing$. Значит, G_j — плотное открытое множество, а E — остаточное множество в X. Таким образом, проблему 18.1 можно сформулировать в эквивалентном виде: найти транзитивный автоморфизм замкнутого единичного квадрата.

Некоторые пространства допускают транзитивный автоморфизм, другие — нет. Например, никакой автоморфизм единичного интервала не является транзитивным; в то же время умножение на $e^{2\pi i\alpha}$, где α иррационально, определяет транзитивное вращение единичной окружности в комплексной плоскости. Пример транзитивного автоморфизма плоскости был в явном виде построен Безиковичем [2], но для замкнутого единичного квадрата нелегко построить такой автоморфизм, не говоря уже о таких дополнительных требованиях, как сохранение площади или неподвижность граничных точек. Существование такого отображения впервые было установлено методом категорий [18]. Тем же методом можно доказать существование транзитивного автоморфизма любой области r-мерного евклидова пространства, $r \geqslant 2$. Метод категорий позволил также установить существование автоморфизмов, обладающих намного более сильным свойством такого типа, а именно так называемой *метрической транзитивностью* [22].

Рассмотрим пространство H всех автоморфизмов единичного квадрата X, наделенное равномерной метрикой

$$\rho(S, T) = \sup |Sx - Tx|.$$

Пространство H топологически полно по тем же соображениям, что и в одномерном случае (гл. 13). Предположим, что T транзитивен; пусть x — точка с плотной положительной полуорбитой. Пусть $\varepsilon > 0$ настолько мало, что круг с центром в x радиуса ε

содержится в X. Пусть n — наименьшее положительное целое число, при котором $|x - T^n x| < \varepsilon$. Возьмем такой открытый круг U с центром в x радиуса $<\varepsilon$, что $T^n x$ лежит внутри U, а Tx, $T^2 x$, ..., $T^{n-1}x$ принадлежат $X \setminus \bar{U}$. Далее можно найти такой замкнутый круг D с центром в x, что D и $T^n(D)$ содержатся в U, а $T(D)$, $T^2(D)$, ..., $T^{n-1}(D)$ содержатся в $X \setminus U$. Пусть S — автоморфизм X, равный тождественному отображению вне U, а внутри U определяемый деформацией вдоль радиусов, при которой $T^n(D)$ отображается на некоторое подмножество внутри D. Тогда $S \circ T$ — такой автоморфизм X, что $(S \circ T)^n$ отображает круг D на подмножество внутри него. Следовательно, $S \circ T$ не является транзитивным, так же как и любой автоморфизм, достаточно близкий к $S \circ T$ в H. Но $\rho(S \circ T, T) < \varepsilon$. Это показывает, что транзитивные автоморфизмы образуют лишь нигде не плотное подмножество в H. Теорема Бэра, примененная к H, не дает возможности утверждать, что такие автоморфизмы существуют. Создается впечатление, что метод категорий здесь не срабатывает!

Но попробуем усложнить проблему и потребуем дополнительно, чтобы T сохраняло меру. Тогда естественно рассмотреть пространство M сохраняющих меру автоморфизмов квадрата с той же метрикой, что и в H. Так как M — замкнутое подмножество в H, то M топологически полно.

Пусть $\{U_i\}$ — как-то занумерованные всевозможные содержащиеся в X открытые квадраты с рациональными вершинами. Для любых двух положительных целых чисел i и j положим

$$E_{ij} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{T \in M;\ U_i \cap T^{-k} U_j \neq \varnothing\}.$$

Ясно, что E_{ij} открыто в M. Плотно ли оно? Рассмотрим сначала множества

$$P_{ij} = \{T \in M;\ T^j x = x \text{ для всех } x \text{ из } U_i\}$$

и

$$P = \bigcup_{i,j} P_{ij}.$$

Очевидно, что P_{ij} замкнуты в M. Если T принадлежит множеству P_{ij}, то каждая точка из U_i имеет период, на который делится j. Значит, можно найти круг D сколь угодно малого радиуса, содержащийся в U_i и такой, что для некоторого целого положительного k (делителя числа j) множества D, $T(D)$, ..., $T^{k-1}(D)$ не пересекаются, а T^k равен на D тождественному отображению. Пусть S — сохраняющий меру автоморфизм X, который вращает внутри D некоторое концентрическое с D круговое кольцо на угол, иррациональный относительно π, и который равен тождественному отображению вне D. Тогда ни одна из точек этого кольца не будет периодической относительно $S \circ T$. Значит, $S \circ T$ принадлежит множеству $M \setminus P_{ij}$, причем $\rho(S \circ T, T)$ сколь угодно мало. Следовательно, P_{ij} нигде не плотно и P — множество первой категории в M. Множество $M \setminus P$ состоит из всех сохраняющих меру автоморфизмов квадрата, имеющих непериодические точки в каждом непустом открытом подмножестве квадрата.

Для любых i и j, любого $T \in M \setminus P$ и $\varepsilon > 0$ построим следующее отображение S. Соединим отрезком какую-нибудь точку из U_i с какой-нибудь точкой из U_j. Выберем точки $p_1, p_2, \ldots, p_{N+1}$ на этом отрезке так, что $p_1 \in U_i$, $p_{N+1} \in U_j$ и $|p_k - p_{k+1}| < \varepsilon/2$ $(k = 1, \ldots, N)$. Подберем такое положительное число $\delta < {}^1/_2 \min |p_k - p_{k+1}|$, что δ-окрестности точек p_1 и p_{N+1} содержатся соответственно в U_i и U_j. Выберем непериодическую точку x_1 в δ-окрестности точки p_1, для которой некоторая точка $T^{n_1}x_1$ ее положительной полуорбиты находится в той же окрестности. Это можно сделать, так как возвращающиеся точки отображения T образуют в квадрате остаточное множество (по теореме 17.3) и такое же множество образуют непериодические точки любого отображения T из $M \setminus P$. Таким же образом для $k = 2, \ldots, N+1$ выберем такую непериодическую точку x_k в δ-окрестности точки p_k, что $T^{n_k}x_k$ при некотором $n_k > 0$ лежит в той же окрестности. Более того, пусть x_k выбрана так, что она не принадлежит орбитам точек $x_1, \ldots$

..., x_{k-1}. Тогда все точки множества

$$F = \{T^n x_k;\ 0 \leqslant n \leqslant n_k,\ 1 \leqslant k \leqslant N+1\}$$

различны и

$$|T^{n_k}x_k - x_{k+1}| \leqslant$$
$$\leqslant |T^{n_k}x_k - p_k| + |p_k - p_{k+1}| + |p_{k+1} - x_{k+1}| <$$
$$< \delta + \varepsilon/2 + \delta < \varepsilon$$

при $k = 1, 2, \ldots, N$. Значит, существуют такие непересекающиеся открытые области $R_1, \ldots, R_N$ диаметра меньше ε, что

$$R_k \cap F = \{T^{n_k}x_k,\ x_{k+1}\} \quad (k = 1, \ldots, N).$$

(В качестве R_k можно взять окрестности подходящих дуг, соединяющих $T^{n_k}x_k$ и x_{k+1}.) Теперь легко определить преобразование S из M, равное тождественному вне областей $R_1, \ldots, R_N$ и переводящее $T^{n_k}x_k$ в x_{k+1} ($k = 1, \ldots, N$). Тогда автоморфизм

$$(S \circ T)^{n_1 + n_2 + \ldots + n_N}$$

переводит x_1 в x_{N+1}. Значит, $S \circ T$ принадлежит множеству E_{ij}. Так как $\rho(S \circ T, T) < \varepsilon$, то отсюда следует, что E_{ij} плотно в M. По теореме Бэра о категории, множество $\bigcap_{i,j} E_{ij}$ является плотным G_δ-множеством в M и, следовательно, не пусто. Для любого T из $\bigcap_{i,j} E_{ij}$ имеем

$$U_i \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} T^{-k}U_j \neq \varnothing$$

при любых i и j. Значит, множество

$$G_j = \bigcup_{k=1}^{\infty} T^{-k}U_j$$

открыто и плотно в квадрате. Следовательно, $\bigcap_j G_j \neq \varnothing$ (снова по теореме Бэра о категории!). Для любой точки x из этого множества последовательность x, Tx, T^2x, ... плотна в квадрате. Таким образом, любое отображение T из $\bigcap_{i,j} E_{ij}$ является транзитивным.

ГЛАВА 19

ТЕОРЕМА ДВОЙСТВЕННОСТИ СЕРПИНСКОГО—ЭРДЕША

Понятие категории находит применение главным образом при доказательстве теорем существования. В этом проявляется, так сказать, *телескопическая* функция этого понятия. Теорема Бэра дает нам возможность обнаружить математические объекты, которые без нее было бы трудно разглядеть. Но изучение категории может оказать и еще одну услугу. Излагая параллельно теорию меры и теорию категории и обращая внимание на те моменты, которые обнаруживают сходство и различие этих теорий, мы пытались показать, как одна теория проливает новый свет на другую. Поскольку теория меры более обширна и считается более «важной» по сравнению с теорией категории, то это освещение направлено главным образом в сторону теории меры. Это можно назвать *стереоскопической* функцией изучения категории; благодаря этому теория меры становится более рельефной. Попытки найти какому-то факту аналог в теории категории или соответственно в теории меры часто оказывались очень полезными. В этой и последующих главах мы подробнее изучим уже отмеченную ранее двойственность между мерой и категорией, выясним, насколько далеко она распространяется в случае прямой и в случае других пространств, и установим, что лежит в ее основе.

Напомним, какие сходные свойства мы отмечали у класса нуль-множеств и класса множеств первой категории на прямой. Каждый из них является σ-идеалом. Оба включают в себя все счетные множества. Оба включают в себя некоторые множества мощности c. Оба класса имеют мощность 2^c (в отличие от σ-идеала счетных множеств, мощность которого равна c). Ни один из классов не включает в себя интервалов; дополнение любого множества из каждого класса плотно на прямой. Оба класса инвариантны относительно сдвига. Любой член каждого из классов содержится в борелевском множестве из того же класса.

Мы заметили и ряд различий. Любое нуль-множество содержится в G_δ-нуль-множестве, в то время как любое множество первой категории содержится в F_σ-множестве первой категории. Ни один из классов не содержится в другом. Прямую можно разбить на пару дополняющих друг друга множеств, одно из которых первой категории, а второе меры нуль.

Еще одно общее свойство, которое раньше в явном виде не упоминалось, состоит в следующем:

Теорема 19.1. *Дополнение любого линейного нуль-множества содержит нуль-множество мощности c. Дополнение любого линейного множества первой категории содержит множество первой категории мощности c.*

Доказательство. По теореме 3.18, дополнение нуль-множества содержит несчетное замкнутое множество, которое, по лемме 5.1, содержит замкнутое нуль-множество мощности c.

Дополнение множества первой категории содержит несчетное G_δ-множество, которое, по лемме 5.1, содержит нигде не плотное множество мощности c. ■

Свойства этих σ-идеалов указывают на то, что они, вероятно, подобны в следующем смысле. Класс K подмножеств множества X называется *подобным* классу L подмножеств множества Y, если существует такое взаимно однозначное отображение f множества X на Y, что $f(E) \in L$ тогда и только тогда, когда $E \in K$.

В 1934 г. Серпинский [27] доказал следующую теорему:

Теорема 19.2 (Серпинский). *В предположении справедливости гипотезы континуума существует такое взаимно однозначное отображение f прямой на себя, что $f(E)$ является нуль-множеством тогда и* *только тогда, когда E является множеством первой категории.*

Эта теорема объясняет многие совпадения свойств, которые мы уже отмечали. Она позволяет сформулировать следующий принцип двойственности. Пусть P — любое утверждение, использующее лишь понятие нуль-множества и понятия чистой теории множеств (например, мощность, свойство пустоты пересечения или любые другие свойства, инвариантные относительно произвольного взаимно однозначного отображения). Пусть P^* — утверждение, полученное из P заменой всюду термина «нуль-множество» термином «множество первой категории». Тогда каждое из утверждений P и P^* является следствием другого в предположении, что справедлива гипотеза континуума. Можно ли доказать теорему Серпинского, не используя гипотезу континуума, не известно.

Серпинский поставил вопрос о справедливости более сильной теоремы: существует ли отображение, переводящее каждый из двух классов в другой одновременно? Ответ на этот вопрос дал Эрдёш [38] в 1943 г. Лишь слегка усовершенствовав доказательство Серпинского, Эрдёш доказал такое утверждение:

Теорема 19.3 (Эрдёш). *В предположении справедливости гипотезы континуума существует такое взаимно однозначное отображение f прямой на себя, что $f = f^{-1}$ и $f(E)$ является нуль-множеством тогда и только тогда, когда E является множеством первой категории. (Отсюда следует, что $f(E)$ является множеством первой категории тогда и только тогда, когда E является нуль-множеством.)*

Значение этой теоремы состоит в том, что она устанавливает более сильную двойственность, которую можно сформулировать так:

Теорема 19.4 (принцип двойственности). *Пусть P — утверждение, в которое входят лишь понятия множества меры нуль, множества первой категории и понятия чистой теории множеств. Пусть P^* — утверждение, полученное из P взаимной заменой всех тер-*

минов «нуль-множество» и «множество первой категории». Тогда каждое из утверждений P и P^* следует из другого при условии, что справедлива гипотеза континуума.

Мы докажем теорему Серпинского — Эрдёша, опираясь на следующее чисто теоретико-множественное утверждение:

Теорема 19.5. *Пусть X — множество мощности $\aleph_1$, и пусть класс K подмножеств из X обладает следующими свойствами:*

(a) *K есть σ-идеал;*

(b) *объединение всех множеств из K равно X;*

(c) *K содержит подкласс G мощности $\leqslant \aleph_1$, такой, что каждый элемент из K содержится в некотором элементе из G;*

(d) *дополнение каждого члена из K содержит множество мощности $\aleph_1$, также принадлежащее K.*

Тогда X можно разбить на $\aleph_1$ непересекающихся множеств X_α, каждое мощности $\aleph_1$, так, что подмножество E множества X принадлежит K тогда и только тогда, когда E содержится в каком-нибудь счетном объединении множеств X_α.

Доказательство. Пусть $A = \{\alpha; 0 \leqslant \alpha < \Omega\}$ — множество порядковых чисел первого и второго класса, т. е. все порядковые числа, меньшие Ω — первого порядкового числа, которому предшествует несчетное множество порядковых чисел. Тогда A имеет мощность $\aleph_1$ и существует отображение $\alpha \to G_\alpha$ множества A на G. Для каждого $\alpha \in A$ положим по определению

$$H_\alpha = \bigcup_{\beta \leqslant \alpha} G_\beta \quad \text{и} \quad K_\alpha = H_\alpha \setminus \bigcup_{\beta < \alpha} H_\beta.$$

Положим $B = \{\alpha \in A;\ K_\alpha \text{ несчетно}\}$. Из свойств (a), (c) и (d) следует, что у B нет верхней грани в A. Значит, существует взаимно однозначное сохраняющее порядок отображение φ множества A на B. Для каждого α из A определим множество

$$X_\alpha = H_{\varphi(\alpha)} \setminus \bigcup_{\beta < \alpha} H_{\varphi(\beta)}.$$

По построению и по свойству (a) множества X_α не пересекаются и принадлежат K. Так как $X_\alpha \supset K_{\varphi(\alpha)}$, то каждое из множеств X_α имеет мощность $\aleph_1$. Для любого $\beta \in A$ справедливо неравенство $\beta \leq \varphi(\alpha)$ при некотором $\alpha \in A$, и, следовательно,

$$G_\beta \subset H_\beta \subset H_{\varphi(\alpha)} = \bigcup_{\gamma \leqslant \alpha} X_\gamma.$$

Значит, в силу (c) каждый элемент из K содержится в счетном объединении множеств X_α. Используя (b), получаем, что

$$X = \bigcup K \subset \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha.$$

Таким образом, $\{X_\alpha;\ \alpha \in A\}$ дает разбиение множества X, обладающее требуемыми свойствами. ■

Теорема 19.6. *Пусть X — множество мощности $\aleph_1$. Пусть K и L — два класса подмножеств из X, каждый из которых обладает свойствами* (a)—(d) *из теоремы* 19.5. *Предположим также, что X — объединение двух дополнительных по отношению друг к другу множеств M и N, причем $M \in K$ и $N \in L$. Существует такое взаимно однозначное отображение f множества X на себя, что $f = f^{-1}$ и $f(E) \in L$ тогда и только тогда, когда $E \in K$.*

Доказательство. Пусть X_α $(0 \leqslant \alpha < \Omega)$ — разбиение множества X, построенное для класса K так же, как при доказательстве теоремы 19.5. Можно предположить, что M принадлежит порождающему классу G и что G_0 взято равным M. Тогда $X_0 = M$, так как M не может быть счетным. Аналогично пусть Y_α $(0 \leqslant \alpha < \Omega)$ — разбиение X, соответствующее классу L, причем $Y_0 = N$. Тогда

$$M = \bigcup_{0<\alpha<\Omega} Y_\alpha \quad \text{и} \quad N = \bigcup_{0<\alpha<\Omega} X_\alpha.$$

Множества X_α и Y_α при $0 < \alpha < \Omega$ образуют разбиение X на множества мощности $\aleph_1$. Для каждого $0 < \alpha < \Omega$ обозначим через f_α взаимно однозначное отображение X_α на Y_α. Определим отображение f, положив его равным f_α на X_α и равным f_α^{-1} на Y_α при $0 < \alpha < \Omega$. Тогда f — взаимно однозначное отображение X на себя, причем f равно f^{-1} и $f(X_\alpha) = Y_\alpha$ при всех $0 < \alpha < \Omega$. Так как

$$X_0 = \bigcup_{0<\alpha<\Omega} Y_\alpha \quad \text{и} \quad Y_0 = \bigcup_{0<\alpha<\Omega} X_\alpha,$$

то, кроме того, $f(X_0) = Y_0$. Таким образом, $f(X_\alpha) = Y_\alpha$ при всех $0 \leqslant \alpha < \Omega$. Из свойств множеств X_α и Y_α, установленных в теореме 19.5, получаем, что $f(E) \in L$ тогда и только тогда, когда $E \in K$. ■

Теорема 19.3 немедленно следует из теоремы 19.6. Возьмем в качестве X прямую. Пусть K — класс множеств первой категории, а L — класс нуль-множеств. Тогда K порождается классом F_σ-множеств первой категории, а L — классом G_δ-нуль-множеств. Каждый из этих порождающих классов имеет мощность c. Согласно гипотезе континуума, $c = \aleph_1$, и, значит, условие (c) выполнено. Условие (d) следует из теоремы 19.1, а условия (a) и (b) очевидны. В качестве множеств M и N можно взять множества A и B из теоремы 1.6.

ГЛАВА 20

ПРИМЕРЫ ДВОЙСТВЕННОСТИ

В 1934 г. в своей книге «Hypothèse du continu» [28] Серпинский собрал несколько примеров двойственных утверждений (в узком смысле, так как теорема Эрдёша тогда еще не была доказана). Здесь мы рассмотрим три пары таких утверждений, иногда в несколько модифицированном виде. Каждое из них доказано пока только с помощью гипотезы континуума. Поэтому мы ничего не теряем, получая двойственные утверждения с помощью принципа двойственности. Из-за их зависимости от гипотезы континуума мы будем именовать их не «теоремами», а «предложениями».

Первое принадлежит Лузину (1914) [28, стр. 36, 81].

Предложение 20.1. *Любое линейное множество E второй категории имеет такое подмножество N мощности c, что каждое его несчетное подмножество есть множество второй категории.*

Доказательство. Пусть $\{X_\alpha; \alpha < \Omega\}$ — разбиение прямой X, построенное, как в теореме 19.5, по классу K множеств первой категории. Пусть N — множество, полученное путем выбора по одной точке из каждого непустого множества вида $E \cap X_\alpha$. Так как E — множество второй категории, то N несчетно и, значит, имеет мощность c. Никакое несчетное подмножество из N не может быть покрыто счетным объединением множеств X_α. Значит, никакое несчетное подмножество из N не является множеством первой категории. ■

Несчетное множество, у которого каждое несчетное подмножество является множеством второй категории, называется *множеством Лузина.* Двойственное утверждение было доказано Серпинским в 1924 г. [28, стр. 80, 82].

Предложение 20.1*. *Любое линейное множество E положительной внешней меры содержит такое подмножество N мощности c, что каждое его несчетное подмножество имеет положительную внешнюю меру.*

В предложении 20.1 при $E = R$ мы можем присоединить к N счетное плотное множество и добиться того, что N станет плотным. Тогда подмножество из N будет первой категории относительно N в том и только в том случае, если оно первой категории в R. Следовательно, из этих предложений вытекает существование несчетных подпространств прямой, в которых различие между первой и второй категорией или между лебеговским нуль-множеством и множеством, таковым не являющимся, сводится к различию между счетностью и несчетностью.

Так как каждое подмножество прямой есть объединение нуль-множества и множества первой категории (следствие 1.7), то множество Лузина должно иметь меру нуль, а множество в предложении 20.1* должно быть первой категории.

Предложение 20.2. *Существует такое взаимно однозначное отображение f прямой на свое подмножество, что $f(E)$ — множество второй категории, как только E несчетно.*

Доказательство. В качестве f возьмем любое взаимно однозначное отображение прямой на множество Лузина. ■

Предложение 20.2*. *Существует такое взаимно однозначное отображение f прямой на свое подмножество, что $f(E)$ имеет положительную внешнюю меру, как только E несчетно.*

Предложение 20.3. *Любое линейное множество E второй категории содержит c непересекающихся подмножеств второй категории.*

Доказательство. Пусть f — взаимно однозначное отображение прямой R на множество Лузина, содержащееся в E. Тогда наше утверждение следует из того, что прямая и плоскость имеют одинаковую мощность. ■

Предложение 20.3*. *Любое линейное множество E положительной внешней меры содержит c непересекающихся множеств положительной внешней меры.*

Как было показано ранее (теорема 5.5), любое множество положительной внешней меры содержит неизмеримое подмножество. Значит, из предложения 20.3* вытекает, что любое множество E положительной меры содержит c непересекающихся неизмеримых множеств. По лемме Цорна, это семейство содержится в максимальном классе непересекающихся неизмеримых подмножеств из E. Дополнение к объединению этого класса должно иметь меру нуль. Присоединив его к одному из элементов класса, мы получим разбиение E на c непересекающихся неизмеримых подмножеств. В связи с этим интересно отметить, что, как показали Лузин и Серпинский [29], не используя гипотезу континуума, прямую можно разбить на c непересекающихся множеств Бернштейна и, значит, на c непересекающихся множеств положительной внешней меры. В то же время эта конструкция позволяет установить двойственное утверждение: прямую можно разбить на c непересекающихся множеств второй категории. Можно показать, что эти свойства влекут за собой неполноту алгебры всех подмножеств прямой по модулю идеала нуль-множеств или по модулю идеала множеств первой категории. Это означает, что не каждое подмножество факторалгебры имеет верхнюю грань [30, примечание 11].

Ни одно из до сих пор рассмотренных утверждений не касалось одновременно меры и категории. Рассмотрим теперь некоторые примеры двойственности в более широком смысле. Очевидный пример дает теорема 1.6: прямую можно разбить на два дополнительных по отношению друг к другу множества, одно из которых первой категории, а второе меры нуль. Это утверждение двойственно самому себе. Вот несколько более интересный пример: подмножество прямой является нуль-множеством, если его пересечение с каждым множеством первой категории не более чем счетно. Двойственное утверждение: подмножество прямой является множеством первой категории, если его пересечение с каждым нуль-множеством не более чем счетно. Оба эти утверждения следуют из теоремы 1.6; гипотеза континуума здесь не нужна.

Рассмотрим теперь один нетривиальный пример. Мы слегка обобщим одно утверждение Серпинского [28, стр. 138].

Предложение 20.4. *Для любого класса K мощности c взаимно однозначных преобразований прямой, переводящих нуль-множества в нуль-множества, найдется такое линейное множество E первой категории и мощности c, что $TE \triangle E$ счетно при любом T из K.*

Доказательство. Припишем индексы элементам из K и из R так, чтобы

$$K = \{T_\alpha;\ \alpha < \Omega\} \quad \text{и} \quad R = \{p_\alpha;\ \alpha < \Omega\}.$$

Пусть A — такое нуль-множество, что $R \setminus A$ — множество первой категории. Для $0 < \alpha < \Omega$ обозначим через G_α группу, порожденную преобразованиями T_β при $\beta < \alpha$. Тогда G_α состоит из всех произведений вида

$$T_{\beta_1}^{k_1} T_{\beta_2}^{k_2} \dots T_{\beta_n}^{k_n},$$

где $\beta_i < \alpha$, $k_i = \pm 1$ $(i = 1, \dots, n)$, а n — любое положительное целое число. Следовательно, группа G_α счетна и каждое T из G_α переводит нуль-множества в нуль-множества. Для каждого T из G_α множество TA имеет меру нуль. Значит, $A_\alpha = \bigcup \{TA;\ T \in G_\alpha\}$ — нуль-множество. Пусть $x_0 = p_0$. Предположим, что точки x_β из R уже определены для всех $\beta < \alpha$, и положим $B_\alpha = \{Tx_\beta;\ \beta < \alpha,\ T \in G_\alpha\}$. Тогда B_α — счетное множество, а $A_\alpha \cup B_\alpha$ — нуль-множество. Пусть x_α — первый элемент при нашем полном упорядочении прямой R, такой, что x_α не лежит в $A_\alpha \cup B_\alpha$. Положим $E_\alpha = \{Tx_\alpha;\ T \in G_\alpha\}$ и определим $E = \bigcup\limits_{0<\alpha<\Omega} E_\alpha$.

Тогда E_α счетно, а E несчетно. Кроме того, E является подмножеством множества $R \setminus A$. Значит, E — множество первой категории. Для любых $\beta < \alpha < \Omega$ имеем $T_\beta E_\alpha = E_\alpha$. Значит, $T_\beta E \triangle E \subset \bigcup\limits_{\alpha \leqslant \beta} (E_\alpha \cup T_\beta E_\alpha)$. Это доказывает счетность множества $TE \triangle E$ для любого T из K. ■

Предложение 20.4*. *Для любого класса K мощности c взаимно однозначных и сохраняющих категорию преобразований прямой найдется такое линейное множество E меры нуль и мощности c, что $TE \triangle E$ является счетным при любом T из K.*

Серпинский доказал эти утверждения для класса сдвигов. Однако понятие сдвига не является чисто теоретико-множественным, и поэтому соответствующие предложения, строго говоря, не являются двойственными. Класс всех гомеоморфизмов прямой на себя также имеет мощность c, и поэтому из утверждения 20.4 * вытекает

Следствие 20.5. *В предположении справедливости гипотезы континуума существует такое несчетное линейное множество E, что его образ при любом автоморфизме прямой является нуль-множеством.*

Отсюда видно, что в теореме 13.2 предложение о замкнутости A нельзя опустить (хотя его можно заменить более слабым предположением о том, что A является борелевским множеством). Фактически Серпинский [26, стр. 274] показал, что даже усиленный вариант приведенного выше следствия можно доказать без использования гипотезы континуума. Однако, как это ни странно, до сих пор не удалось доказать, что множество E может иметь мощность c. Если же предположить справедливость гипотезы континуума, то, как мы видели, не только существует такое множество, но его можно выбрать так, чтобы оно отличалось от своего образа при любом автоморфизме прямой на не более чем счетное множество.

ГЛАВА 21

РАСШИРЕННЫЙ ПРИНЦИП ДВОЙСТВЕННОСТИ

Мы видели много примеров, где свойство Бэра играло роль, аналогичную измеримости. Типичным примером такого рода может служить следующая теорема, которая представляет собой другую формулировку теоремы 5.5:

Теорема 21.1. *Если каждое подмножество линейного множества E измеримо, то E является нуль-множеством. Если каждое подмножество из E обладает свойством Бэра, то E — множество первой категории.*

Можно ли так расширить принцип двойственности, чтобы включить в него измеримость и свойство Бэра в качестве двойственных понятий? Такую возможность впервые рассмотрел Шпильрайн [37]. Для обоснования такого принципа желательно найти взаимно однозначное отображение f прямой на себя, при котором $f(E)$ измеримо тогда и только тогда, когда E обладает свойством Бэра, и $f(E)$ является нуль-множеством тогда и только тогда, когда E является множеством первой категории (второе свойство следует из первого по теореме 21.1 и обратному к ней утверждению). Однако, как показал Шпильрайн, такое отображение невозможно.

В самом деле, предположим, что f — такое отображение. Пусть I — единичный интервал и $E = f^{-1}(I)$. Тогда E обладает свойством Бэра. Пусть $x_1, x_2, \ldots$ — счетное плотное подмножество в E, и пусть I_i — такой открытый интервал, содержащий x_i, что

$$m(f(I_i) \cap I) < 1/2^{i+1}.$$

Положим $G = \bigcup_i I_i$. Тогда G — открытое множество и $E \subset \overline{G}$. Значит,

$$E \subset (G \cap E) \cup (\overline{G} \setminus G).$$

Следовательно,

$$I = f(E) \subset f(G \cap E) \cup f(\bar{G} \setminus G) \subset \bigcup_i [f(I_i) \cap I] \cup f(\bar{G} \setminus G).$$

Так как $\bar{G} \setminus G$ нигде не плотно, то $f(\bar{G} \setminus G)$ есть нуль-множество, и, таким образом, $m(I) \leqslant \sum_1^\infty 2^{-i-1} = 1/2$. Получаем противоречие.

Между прочим, приведенные выше рассуждения показывают, что в теореме 19.2 отображения f и f^{-1} не могут быть одновременно измеримыми по Борелю, т. е. мы не можем требовать, чтобы $f(E)$ и $f^{-1}(E)$ были борелевскими множествами для любого борелевского множества E. (Фактически ни f, ни f^{-1} не может быть измеримым по Борелю. Это вытекает из того, что отображение, обратное к взаимно однозначному и измеримому по Борелю отображению, само измеримо по Борелю [12, стр. 500].)

Чтобы окончательно убедиться в том, что расширенный принцип двойственности как некий общий принцип не имеет места, рассмотрим пример, когда он неверен.

Теорема 21.2. *Пусть $E_{i,j}$ — такая двойная последовательность измеримых множеств, что $E_{i,j} \supset E_{i,j+1}$ для всех натуральных чисел i и j и $\bigcap_j E_{i,j}$ является нуль-множеством при каждом i. Тогда существует такая последовательность отображений $n_k(i)$ множества натуральных чисел в себя, что $\bigcap_k \bigcup_i E_{i,n_k(i)}$ является нуль-множеством.*

Доказательство. Пусть $I_k = [-k, k]$. Для любых i и k найдется натуральное $n_k(i)$, такое, что

$$m\left(E_{i,n_k(i)} \cap I_k\right) < 1/k2^i.$$

Значит,

$$m\left(\bigcup_i E_{i,n_k(i)} \cap I_k\right) < 1/k.$$

Положим $E = \bigcap_k \bigcup_i E_{i,\, n_k(i)}$. Для любого конечного интервала I справедливо включение $I \subset I_k$ при всех достаточно больших k. Тогда

$$E \cap I \subset \bigcup_i E_{i,\, n_k(i)} \cap I_k.$$

Значит, $m(E \cap I) < 1/k$ при всех достаточно больших k. Таким образом, $E \cap I$ является нуль-множеством при любом I и, значит, E — нуль-множество. ■

Двойственное предложение. *Пусть $E_{i,j}$ — такая двойная последовательность множеств, обладающих свойством Бэра, что $E_{i,j} \supset E_{i,j+1}$ для всех натуральных i и j и $\bigcap_j E_{i,j}$ является множеством первой категории при каждом i. Тогда существует такая последовательность отображений $n_k(i)$ множества натуральных чисел в себя, что $\bigcap_k \bigcup_i E_{i,\, n_k(i)}$ является множеством первой категории.*

Это утверждение ложно. Пусть r_i — последовательность всех рациональных чисел, и пусть $E_{ij} = (r_i - 1/j,\ r_i + 1/j)$. Эта двойная последовательность удовлетворяет условиям нашего утверждения. При любом отображении $n(i)$ множества натуральных чисел в себя множество $\bigcup_i E_{i,\, n(i)}$ является плотным открытым множеством. Для любой последовательности таких отображений $n_k(i)$ множество $\bigcap_k \bigcup_i E_{i,\, n_k(i)}$ является остаточным, что противоречит утверждению.

Хотя расширенный принцип двойственности в качестве общего принципа неверен, он представляет определенную эвристическую ценность. Многие свойства меры связаны только с такими свойствами класса измеримых множеств, которые присущи и классу множеств, обладающих свойством Бэра. В таких случаях принцип может подсказать (хотя и не может доказать) верное двойственное утверждение. Это в свою очередь наталкивает на поиски абстрактной теоремы, включающей оба утверждения. Иллюстрацией тому служит наше обсуждение теоремы Пуанкаре о возвращении.

Теоремы Фубини и Куратовского — Улама продвигают аналогию еще дальше, ибо они показывают, что топология произведения пространств соответствует мере произведения. «Двойственность» здесь становится еще более зыбкой. Хотя утверждения обеих теорем удивительно похожи, их доказательства мало напоминают одно другое, и нам не удалось найти обобщения, включающего обе эти теоремы. (Связь, которую мы установили, носит другой характер.)

Можно ли пойти еще дальше и распространить аналогию на бесконечные произведения? Если $\{X_i\}$ — последовательность множеств, то декартовым произведением $X = \mathscr{P}X_i$ является множество всех последовательностей $\{x_i\}$, где $x_i \in X_i$, т. е. множество всех таких функций x натурального аргумента со значениями в $\bigcup_i X_i$, что $x_i \in X_i$ при каждом i. Если множества X_i — топологические или метрические пространства, то они определяют соответствующую топологию или метрику в X. Если X_i — пространства с нормированной мерой, то они определяют нормированную меру в произведении X. Мы не будем здесь рассматривать эти понятия в общем виде, а сосредоточимся на одном частном случае.

Пусть X_i состоит из двух элементов: 0 и 1. Тогда X — множество всех последовательностей из нулей и единиц. Чтобы ввести топологию в X, можно использовать отображение X на канторовское множество, определяемое функцией

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} 2x_i/3^i.$$

Подобно этому отображение

$$g(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i/2^i$$

множества X на $[0, 1]$, хотя и не взаимно однозначное, определяет меру $\mu(E) = m(g(E))$ на классе тех множеств E, для которых $g(E)$ измеримо. Таким способом можно определить меру в произведении X.

Подмножество E из X назовем *хвостообразным*, если, как только $x \in E$, а y отличается от x лишь в конечном числе координат, так $y \in E$. Таким образом, принадлежность к хвостообразному множеству зависит только от «хвоста» последовательности $\{x_i\}$. Это понятие удобнее выразить в такой форме. Пусть

$$X^n = \mathscr{P}_1^n X_i \quad \text{и} \quad Y^n = \mathscr{P}_{n+1}^\infty X_i.$$

Тогда $X = X^n \times Y^n$ при каждом n. Множество $E \subset X$ является хвостообразным тогда и только тогда, когда при любом n его можно представить в виде $E = X^n \times B_n$, где B_n — некоторое подмножество из Y^n.

Важной теоремой, касающейся меры произведения, является колмогоровский *закон нуля и единицы*. Для рассматриваемого произведения X он выглядит так:

Теорема 21.3. *Если E — измеримое хвостообразное множество в X, то либо $\mu(E) = 0$, либо $\mu(E) = 1$.*

Мы лишь наметим доказательство, применяя к рассматриваемому случаю рассуждения Халмоша [33, стр. 196]. Пусть A_n — подмножество из X^n, и пусть $F = A_n \times Y^n$. Пусть $E = X^n \times B_n$, где $B_n \subset Y^n$ при каждом n. Тогда $E \cap F = A_n \times B_n$. В нашем случае X^n — конечное множество. Если A_n состоит из k точек, то $\mu(F) = k/2^n$ и $\mu(A_n \times B_n) = \frac{k}{2^n}\mu(X^n \times B_n)$. Значит, $\mu(E \cap F) = \mu(E)\mu(F)$. Каждое измеримое множество можно приблизить в пространстве измеримых множеств (гл. 10) множеством вида F, так как $g(F)$ может равняться любому конечному объединению двоичных отрезков из отрезка $[0, 1]$. Отсюда следует, что равенство $\mu(E \cap F) = \mu(E)\mu(F)$ справедливо для любого измеримого множества F. В частности, оно верно для $F = E$. Значит, $\mu(E) = 0$ или 1.

Есть ли у этой теоремы аналог в терминах категории? Если есть, то он должен выглядеть так:

Теорема 21.4. *Если E — хвостообразное множество в X, обладающее свойством Бэра, то E является либо* *множеством первой категории, либо остаточным множеством.*

Эта теорема верна! В самом деле, предположим, что E не является остаточным множеством. Тогда $X \setminus E$ имеет вид $G \triangle P$, где G — непустое открытое множество, а P — множество первой категории. Множество G есть счетное объединение базисных открытых множеств вида $U = A_n \times Y^n$ (соответствующих отрезкам, с помощью которых строится канторово множество). Следовательно, G содержит множество U вида $U = A_n \times Y^n$, где A_n непусто. По предположению E можно записать в виде $E = X^n \times B_n$. Значит, $U \cap E = A_n \times B_n$. Но, кроме того,

$$A_n \times B_n \subset G \subset (X \setminus E) \cup P.$$

Следовательно,

$$A_n \times B_n \subset E \cap [(X \setminus E) \cup P] \subset P.$$

Поэтому $A_n \times B_n$ является множеством первой категории. Так как A_n — непустое подмножество конечного дискретного пространства X^n, оно является множеством второй категории. Тогда из теоремы 15.3 следует, что B_n есть множество первой категории в Y^n. Значит, $E = X^n \times B_n$ — первой категории в X.

Хотя приведенное здесь доказательство применимо лишь к рассмотренному частному случаю произведения пространств, можно показать, что сама теорема остается справедливой для произведения любого семейства пространств Бэра, каждое из которых имеет счетную базу [20].

В качестве иллюстрации к теореме 21.4 рассмотрим множество E, состоящее из таких последовательностей $\{x_i\}$, для которых $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{1}^{n} x_i = \frac{1}{2}$. Очевидно, что это хвостообразное множество. Кроме того, оно борелевское. Отсюда $\mu(E) = 0$ или $\mu(E) = 1$ и одно из множеств E или $X \setminus E$ первой категории. Какое именно? Нетрудно показать (мы опускаем доказательство), что множеством первой категории является E.

С другой стороны, из борелевского усиленного закона больших чисел следует, что $\mu(E) = 1$. Исходя из этого, можно сказать, что в терминах категории аналог усиленного закона больших чисел оказывается неверным. Таким образом, аналогия между мерой и категорией сохраняется здесь вплоть до закона нуля и единицы, но уже не распространяется на усиленный закон больших чисел. Это напоминает ситуацию, когда аналогия имела место в теореме Пуанкаре о возвращении, но не распространялась на эргодическую теорему. Фактически закон больших чисел можно вывести из эргодической теоремы, так что эти два случая нарушения аналогии не являются независимыми. К сожалению, не известно никакого общего критерия, с помощью которого можно было бы узнать, когда для теоремы, касающейся меры, справедлив аналог в терминах категории.

ГЛАВА 22

МЕРЫ, СОГЛАСОВАННЫЕ С КАТЕГОРИЕЙ

В предыдущей главе было показано, что никакое взаимно однозначное отображение прямой на себя не может одновременно переводить нуль-множества в множества первой категории, а измеримые множества — в множества, обладающие свойством Бэра. В более общем случае, если (X, S, μ) — пространство с мерой, причем $0 < \mu(X) < \infty$, а Y — сепарабельное метрическое пространство без изолированных точек, то ни одно S-измеримое отображение X в Y не может быть таким, что прообраз каждого множества первой категории имеет меру нуль. В самом деле, если бы f было таким отображением, мы смогли бы определить в Y конечную неатомическую борелевскую меру ν, положив $\nu(E) = \mu(f^{-1}(E))$ для каждого борелевского множества E. По теореме 16.5, Y можно разложить в сумму ν-нуль-множества и множества первой категории. Тогда $\nu(Y)$ равнялось бы нулю, что противоречит условию $\mu(X) > 0$.

Однако остается возможность, что в более общих топологических пространствах такое отображение осуществимо, а упомянутого выше разложения не существует. Это действительно так, но такие пространства, как мы увидим, обладают необычными топологическими свойствами. Мы здесь сосредоточим свое внимание на *регулярных* пространствах, т. е. хаусдорфовых пространствах, в которых каждая окрестность точки содержит замкнутую окрестность этой точки. Каждое компактное хаусдорфово пространство является регулярным пространством Бэра, и каждое подпространство регулярного пространства является регулярным [1]).

[1]) См., например, Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, «Наука», М., 1972, стр. 89—94. — *Прим. перев.*

Если X — топологическое пространство с конечной мерой μ, определенной на σ-алгебре S множеств, обладающих свойством Бэра, и если $\mu(E)=0$ тогда и только тогда, когда E является множеством первой категории, то μ называется *мерой, согласованной с категорией*, а (X, S, μ) называется *пространством с мерой, согласованной с категорией.* В таких пространствах расширенный принцип двойственности не просто верен, а сводится к тавтологии. Прежде чем рассматривать вопрос о существовании меры, согласованной с категорией, отметим ряд свойств таких мер.

Теорема 22.1. *Пусть μ — мера, согласованная с категорией, в регулярном пространстве Бэра X. Тогда для любого открытого множества G и любого $\varepsilon > 0$ существует замкнутое множество F, такое, что $F \subset G$ и $\mu(F) > \mu(G) - \varepsilon$, и для любого замкнутого множества F существует открытое множество G, такое, что $F \subset G$ и $\mu(G) < \mu(F) + \varepsilon$.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{F}$ — максимальное семейство непересекающихся непустых открытых множеств U, таких, что $\overline{U} \subset G$. Каждый член из $\mathscr{F}$ имеет положительную меру, значит, $\mathscr{F}$ не более чем счетно, скажем $\mathscr{F} = \{U_i\}$. Положим $U = \bigcup\limits_i U_i$. Тогда $U \subset G$. Из максимальности семейства $\mathscr{F}$ следует, что $G \subset \overline{U}$. Значит, множество $G \setminus U$, содержащееся в $\overline{U} \setminus U$, нигде не плотно, и поэтому $\mu(G) = \sum \mu(U_i)$. Выберем такое n, что $\sum\limits_1^n \mu(U_i) > \mu(G) - \varepsilon$. Тогда $F = \bigcup\limits_1^n \overline{U}_i$ — замкнутое подмножество в G, причем $\mu(F) > \mu(G) - \varepsilon$. Этим доказано первое утверждение. Второе получается переходом к дополнениям. ■

Теорема 22.2. *Если X — регулярное пространство Бэра, а μ — мера в X, согласованная с категорией, то каждое множество первой категории в X нигде не плотно.*

Доказательство. Пусть $P = \bigcup\limits_i N_i$, где N_i нигде не плотны, — произвольное множество первой категории. Так как $\mu(\overline{N}_i) = 0$, то из теоремы 22.1 следует, что для любых натуральных чисел i и j найдется открытое множество G_{ij}, такое, что $\overline{N}_i \subset G_{ij}$ и $\mu(G_{ij}) < 1/2^{i+j}$. Положим $H_j = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} G_{ij}$. Тогда H_j открыто, $P \subset H_j$ и $\mu(\overline{H}_j) = \mu(H_j) < 1/2^j$. Положим $F = \bigcap\limits_{j=1}^{\infty} \overline{H}_j$. Тогда F замкнуто и $P \subset F$. Так как $\mu(F) = 0$, то открытое ядро множества F должно быть пустым. Значит, F, а следовательно, и P нигде не плотны.

Теорема 22.3. *Если μ — согласованная с категорией мера в регулярном пространстве Бэра X, то для любого множества E, обладающего свойством Бэра, имеем*

$$\mu(E) = \mu(\overline{E}) = \mu\left(E'^{-\prime}\right)$$

и

$$\mu(E) = \begin{cases} \inf\{\mu(G);\ E \subset G,\ G \text{ открыто}\} \\ \sup\{\mu(F);\ E \supset F,\ F \text{ замкнуто}\}. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $E = G \triangle P$, где G открыто, а P — множество первой категории. Тогда P, а значит, и $\overline{P}$ нигде не плотны. Так как

$$G \setminus \overline{P} \subset E \subset G \cup P,$$

то

$$G \setminus \overline{P} \subset E'^{-\prime} \subset E \subset \overline{E} \subset \overline{G} \cup \overline{P}.$$

Первое и последнее из этих множеств отличаются одно от другого на нигде не плотное множество. Значит, все эти множества имеют одну и ту же меру. Это доказывает первое утверждение; после этого второе следует из теоремы 22.1. ■

Теорема 22.2 показывает, что пространства, допускающие согласованную с категорией меру, имеют необычные топологические свойства, а из теоремы 22.3

видно, что такие меры очень тесно связаны с топологией пространства.

Рассмотрим теперь следующую проблему: можно ли в данном пространстве (X, S, μ) с конечной мерой ввести такую топологию $\mathscr{T}$, по отношению к которой μ будет мерой, согласованной с категорией? Очевидно, необходимо предположить, что μ — полная мера, так как класс $\mathscr{N}$ нуль-множеств должен совпасть с классом множеств первой категории. По теореме 4.5, любое открытое множество имеет вид $H \setminus \bar{N}$, где H — регулярное открытое множество, а N — нигде не плотное множество. Таким образом, топология определяется регулярными открытыми множествами и нигде не плотными замкнутыми множествами. В пространстве Бэра любое множество E, принадлежащее классу S множеств, обладающих свойством Бэра, однозначно представимо в виде $G \triangle P$, где G — регулярное открытое множество, а P — множество первой категории (теорема 4.6). Если мы положим $G = \varphi(E)$, то φ будет функцией, которая выбирает по представителю из каждого класса эквивалентности элементов S по модулю множеств первой категории. Теорема 4.7 показывает, что функция φ обладает теми же свойствами, что и так же обозначенная функция в теореме 3.21. Это приводит к следующей программе превращения пространства с мерой (X, S, μ) в пространство с мерой, согласованной с категорией. Находим отображение φ класса S в себя, которое удовлетворяет условиям 1)—5) теоремы 3.21. Затем находим подходящий подкласс класса $\mathscr{N}$, элементы которого должны сыграть роль нигде не плотных замкнутых множеств. Мы покажем, что для этой цели всегда годится сам класс $\mathscr{N}$. В результате мы получим максимальную топологию, соответствующую φ. Чтобы реализовать эту программу, нам понадобится следующая теорема, принадлежащая фон Нейману и Магараму [13]. Другое доказательство было дано Ионеску Тульча [8].

Теорема 22.4. *Для данного пространства* (X, S, μ) *с полной конечной мерой существует отображение* φ *класса* S *в себя, обладающее следующими свойствами* *(где $A \sim B$ означает, что $A \triangle B$ принадлежит классу $\mathcal{N}$ μ-нуль-множеств)*:

1) $\varphi(A) \sim A$;
2) *если* $A \sim B$, *то* $\varphi(A) = \varphi(B)$;
3) $\varphi(\varnothing) = \varnothing$, $\varphi(X) = X$;
4) $\varphi(A \cap B) = \varphi(A) \cap \varphi(B)$;
5) *если* $A \subset B$, *то* $\varphi(A) \subset \varphi(B)$.

Мы не будем доказывать эту теорему в общем случае. Нас в первую очередь интересует пространство с мерой Лебега, и мы уже видели, что в этом случае теорема 3.21 определяет нужное нам отображение. Однако дальнейшее введение топологии в этом частном случае не отличается от общего случая. Поэтому предположим, что (X, S, μ) — пространство с полной конечной мерой и что дано отображение $\varphi: S \to S$, обладающее свойствами 1)—5). Обозначим через $\mathcal{N}$ класс μ-нуль-множеств и положим по определению

$$\mathcal{T} = \{\varphi(A) \setminus N;\quad A \in S,\ N \in \mathcal{N}\}.$$

Теорема 22.5. *$\mathcal{T}$ является топологией в X.*

Доказательство. Поскольку $\varnothing \in \mathcal{N}$, из свойства 3) следует, что множества $X = \varphi(X) \setminus \varnothing$ и $\varnothing = \varphi(\varnothing) \setminus \varnothing$ принадлежат $\mathcal{T}$. Согласно свойству 4),

$$[\varphi(A_1) \setminus N_1] \cap [\varphi(A_2) \quad N_2] = \varphi(A_1 \cap A_2) \setminus (N_1 \cup N_2).$$

Таким образом, класс $\mathcal{T}$ замкнут относительно пересечения. Чтобы показать, что $\mathcal{T}$ замкнут относительно произвольного объединения, предположим, что

$$\mathcal{F} = \{\varphi(A_\alpha) \setminus N_\alpha;\quad \alpha \in \Gamma,\ A_\alpha \in S,\ N_\alpha \in \mathcal{N}\}$$

— любой подкласс из $\mathcal{T}$. Обозначим через b верхнюю грань мер конечных объединений элементов из $\mathcal{F}$ и выберем такую последовательность $\{\alpha_n\}$, что $\mu\left(\bigcup_1^\infty A_{\alpha_n}\right) = b$. Положим $A = \bigcup_1^\infty A_{\alpha_n}$. Тогда $A \in S$ и из определения b следует, что $A_\alpha \setminus A \in \mathcal{N}$ для каждого $\alpha \in \Gamma$. Так как

$$A_\alpha \setminus (A_\alpha \setminus A) \subset A,$$

то из 2) и 5) следует, что

$$\varphi(A_\alpha) \subset \varphi(A) \text{ для каждого } \alpha.$$

Полагая

$$N_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} [N_{\alpha_n} \cup (A_{\alpha_n} \setminus \varphi(A_{\alpha_n}))],$$

получаем, что $N_0 \in \mathcal{N}$ и

$$A \setminus N_0 \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} [\varphi(A_{\alpha_n}) \setminus N_{\alpha_n}] \subset \bigcup_{\alpha \in \Gamma} [\varphi(A_\alpha) \setminus N_\alpha] \subset \varphi(A).$$

Крайние члены отличаются на нуль-множество, и поэтому

$$\bigcup_{\alpha \in \Gamma} [\varphi(A_\alpha) \setminus N_\alpha] = \varphi(A) \setminus N$$

для некоторого $N \in \mathcal{N}$ в силу полноты меры μ. ■

Эту топологию подробно изучили Ионеску Тульча [9, гл. 5].

Теорема 22.6. *Множество $N \subset X$ нигде не плотно по отношению к топологии $\mathcal{T}$ тогда и только тогда, когда $N \in \mathcal{N}$. Каждое нигде не плотное множество замкнуто.*

Доказательство. Если $N \in \mathcal{N}$, то $X \setminus N = \varphi(X) \setminus N \in \mathcal{T}$, и, значит, каждый член из $\mathcal{N}$ замкнут. Если $N \in \mathcal{N}$ и $\varphi(A_1) \setminus N_1 \subset N$ для некоторых $A_1 \in S$ и $N_1 \in \mathcal{N}$, то $\varphi(A_1) \in \mathcal{N}$, и поэтому $\varphi(A_1) = \varnothing$ в силу 2) и 3). Значит, $\varphi(A_1) \setminus N_1 = \varnothing$, и, таким образом, N нигде не плотно. Обратно, если F замкнуто и нигде не плотно, то $X \setminus F = \varphi(A) \setminus N$ для некоторых $A \in S$ и $N \in \mathcal{N}$; значит, F принадлежит S. Так как

$$F \supset \varphi(F) \setminus [\varphi(F) \setminus F] \in \mathcal{T},$$

то из нигде не плотности F вытекает, что $\varphi(F) \subset \varphi(F) \setminus F$. Значит, в силу 1), 2) и 3) $\varphi(F) = \varnothing$. Следовательно, $F \sim \varnothing$, т. е. $F \in \mathcal{N}$. Таким образом, $\mathcal{N}$ совпадает с классом замкнутых нигде не плотных множеств. Поскольку каждое нигде не плотное множество содержится в замкнутом нигде не плотном множестве и каждое подмножество элемента из $\mathcal{N}$ также принадлежит $\mathcal{N}$, отсюда следует, что каждое нигде не плотное множество замкнуто. ■

Теорема 22.7. *Множество $A \subset X$ обладает свойством Бэра тогда и только тогда, когда $A \in S$.*

Доказательство. Если $A \in S$, то $A = \varphi(A) \triangle (\varphi(A) \triangle A)$. Так как $\varphi(A) \in \mathcal{T}$ и $\varphi(A) \triangle A \in \mathcal{N}$, то из теоремы 22.6 следует, что A обладает свойством Бэра. Обратно, если A обладает свойством Бэра, то $A = [\varphi(B) \setminus N] \triangle M$ для некоторых $B \in S$, $N \in \mathcal{N}$ и некоторого множества M первой категории. По теореме 22.6, M принадлежит $\mathcal{N}$ и, значит, $A \in S$. ■

Теорема 22.8. *Множество $G \subset X$ является регулярным открытым множеством тогда и только тогда, когда $G = \varphi(A)$ при некотором $A \in S$.*

Доказательство. Если $A \in S$, то $\varphi(A)$ открыто и его замыкание в силу теоремы 22.6 имеет вид $\varphi(A) \cup N$ при некотором $N \in \mathcal{N}$. Пусть $\varphi(A_1) \setminus N_1$ — любое открытое подмножество множества $\varphi(A) \cup N$. Тогда

$$\varphi(A_1) \setminus N_1 \subset \varphi(A_1) = \varphi(\varphi(A_1) \setminus N_1) \subset \varphi(\varphi(A) \cup N) = \varphi(A).$$

Таким образом, $\varphi(A)$ — наибольшее открытое подмножество в $\varphi(A) \cup N$. Это показывает, что $\varphi(A)$ равно открытому ядру своего замыкания, т. е. является регулярным открытым множеством. Обратно, если G — регулярное открытое множество, то $G = \varphi(A) \setminus N$ для некоторых $A \in S$ и $N \in \mathcal{N}$. Так как $\varphi(A) \triangle [\varphi(A) \setminus N]$ содержится в N, то $\varphi(A) \sim \varphi(A) \setminus N = G$. Поскольку G и $\varphi(A)$ отличаются одно от другого на нигде не плотное множество и оба являются регулярными открытыми множествами, отсюда следует, что $G = \varphi(A)$. ■

Итак, мы показали, что проблема введения такой топологии в пространстве с полной конечной мерой (X, S, μ), при которой мера оказывается согласованной с категорией, сводится к нахождению функции φ.

В общем случае мало можно сказать по поводу регулярности полученной топологии $\mathcal{T}$. Пространство с этой топологией не обязано даже быть хаусдорфовым, так как S может не разделять точки из X. Однако в случае лебеговской меры в R или в любом открытом интервале мы можем взять в качестве $\varphi(A)$ множество точек, где A имеет плотность 1. Тогда соответствующая топология $\mathcal{T}$ называется *плотностной топологией*. Она состоит из всех измеримых множеств, которые имеют плотность 1 в каждой своей точке. Значит, $\mathcal{T}$ включает в себя и все множества, открытые в обычной топологии, и, следовательно, является хаусдорфовой. На самом деле можно показать, что плотностная топология в R определяет вполне регулярное, но не обязательное нормальное пространство [7]. Мы докажем лишь его регулярность.

Теорема 22.9. *Плотностная топология в R определяет регулярное пространство.*

Доказательство. Пусть x — точка множества $A \in \mathcal{T}$. Тогда A имеет в точке x плотность 1. Для каждого целого положительного n через F_n обозначим такое замкнутое в обычном смысле подмножество из $(x - 1/2n,\ x + 1/2n) \cap A$, что $m(F_n) > (1 - 1/n) \times \times m[(x - 1/2n,\ x + 1/2n) \cap A]$. Если $F = \{x\} \cup \bigcup\limits_{1}^{\infty} F_n$, то F — замкнутое в обычном смысле множество и $\varphi(F) \subset F \subset A$. Так как A имеет в x плотность 1, то

$$nm[(x - 1/2n,\ x + 1/2n) \cap F] \geqslant nm(F_n) \to 1.$$

Значит, F имеет плотность 1 в x, и поэтому $x \in \varphi(F)$. Таким образом, $\varphi(F)$ является такой $\mathcal{T}$-окрестностью точки x, у которой $\mathcal{T}$-замыкание содержится в F, а значит, и в A. ■

Итак, мера Лебега в любом открытом интервале является мерой, согласованной с категорией, относительно плотностной топологии. На прямой R мера Лебега не является конечной, и поэтому не согласована с категорией в том смысле, как мы это понимаем. Однако легко определить эквивалентную конечную меру, которая тогда и будет согласована с категорией относительно плотностной топологии в R. Для плотностной топологии справедлив расширенный принцип двойственности и уже невозможно представить R в виде суммы нуль-множества и множества первой категории.

Пространства с мерой, согласованной с категорией, можно строить и другими способами. Первым примером таких пространств следует признать булевские пространства с мерой, т. е. пространства, полученные из алгебр с конечной мерой при помощи теоремы Стоуна о представлении. Они дают примеры компактных хаусдорфовых пространств, допускающих согласованную с категорией меру [34]. Среди непрерывных образов этих пространств можно найти и другие примеры [19]. Поскольку такие пространства больше относятся к сфере изучения булевских алгебр, мы не будем их здесь касаться.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Банах (Banach S.), Sur les suites d'ensembles excluant l'existence d'une mesure, *Colloq. Math.*, **1** (1948), 103—108.
2. Безикович (Besicovitch A. S.), A problem on topological transformation of the plane, *Fund. Math.*, **28** (1937), 61—65.
3. Биркгоф Дж. Д., Динамические системы, Гостехиздат, М. — Л., 1941.
4. Борель (Borel E.), Leçons sur les fonctions de variables réeles, Paris, Gauthier-Villars, 1905.
5. Борель (Borel E.), Leçons sur la théorie des fonctions, Paris, Gauthier-Villars, 1914.
6. Брауэр (Brouwer L. E. J.), Lebesguesches Mass und Analysis Situs, *Math. Ann.*, **79** (1919), 212—222.
7. Гофман, Нойгебауэр, Нишура (Goffman C., Neugebauer C. J., Nishiura T.), Density topology and approximate continuity, *Duke Math. J.*, 28 (1961), 497—505.
8. Ионеску Тульча, Ионеску Тульча (Ionescu Tulcea A., Ionescu Tulcea C.), On the lifting property I, *J. Math. Anal. Appl.*, **3** (1961), 537—546.
9. Ионеску Тульча, Ионеску Тульча (Ionescu Tulcea A., Ionescu Tulcea C.), Topics in the theory of lifting, Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete, Bd. 48, Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1969.
10. Каратеодори (Carathéodory C.), Über den Wiederkehrsatz von Poincaré, *S. B. Preuss. Akad. Wiss.*, **1919**, 580—584.
11. Кемперман, Магарам (Kemperman J. H. B., Maharam D.), R^c is not almost Lindelöf, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **24** (1970), 772—773.
12. Куратовский К., Топология, ч. I, «Мир», М., 1966.
13. Магарам (Maharam D.), On a theorem of von Neumann, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **9** (1958), 987—994.
14. Марчевский, Сикорский (Marczewski E., Sikorski R.), Measures in non-separable metric spaces, *Colloq. Math.*, **1** (1948), 133—139.
15. Марчевский, Сикорский (Marczewski E., Sikorski R.), Remarks on mesure and category, *Colloq. Math.*, **2** (1949), 13—19.
16. Мычельский (Mycielski J.), Some new ideals of sets on the real line, *Colloq. Math.*, **20** (1969), 71—76.
17. Окстоби (Oxtoby J. C.), The category and Borel class of certain subsets of $\mathscr{L}_p$, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **43** (1937), 245—248.

18. Окстоби (Oxtoby J. C.), Note on transitive transformations, *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S.*, **23** (1937), 443—446.

19. Окстоби (Oxtoby J. C.), Spaces that admit a category measure, *J. Reine Angew. Math.*, **205** (1961), 156—170.

20. Окстоби (Oxtoby J. C.), Cartesian products of Baire spaces, *Fund. Math.*, **49** (1961), 157—166.

21. Окстоби, Улам (Oxtoby J. C., Ulam S. M.), On the equivalence of any set of first category to a set of measure zero, *Fund. Math.*, **31** (1938), 201—206.

22. Окстоби, Улам (Oxtoby J. C., Ulam S. M.), Measure-preserving homeomorphisms and metrical transitivity, *Ann. Math.*, (2), 42 (1941), 874—920.

23. Пуанкаре (Poincaré H.), Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, Vol. 3, Paris, Gauthier-Villars, 1899. [Русский перевод: в книге Пуанкаре А., Избранные труды, т. 2, «Наука», М., 1972, стр. 7—356.]

24. Радемахер (Rademacher H.), Eineindeutige Abbildungen und Meßbarkeit, *Monatsh. Math. Phys.*, **27** (1916), 183—291.

25. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б., Лекции по функциональному анализу, ИЛ, М., 1954.

26. Серпинский (Sierpinski W.), Sur une extension de la notion de l'homéomorphie, *Fund. Math.*, **22** (1934), 270—275.

27. Серпинский (Sierpinski W.), Sur la dualité entre la première catégorie et la mesure nulle, *Fund. Math.*, **22** (1934), 276—280.

28. Серпинский (Sierpinski W.), Hypothèse du continu, Monografie Matematyczne, Vol. 4, Warszawa — Lwów, 1934.

29. Серпинский, Лузин (Sierpinski W., Lusin N.), Sur une décomposition d'un intervalle en une infinité non dénombrable d'ensembles non mesurables, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **165** (1917), 422—424.

30. Сикорский (Sikorski R.), On an unsolved problem from the theory of Boolean algebras, *Colloq. Math.*, **2** (1949), 27—29.

31. Улам (Ulam S. M.), Zur Maßtheorie in der allgemeinen Mengenlehre, *Fund. Math.*, **16** (1930), 141—150.

32. Улам С., Нерешенные математические задачи, «Наука», М., 1964.

33. Халмош П., Теория меры, ИЛ, М., 1953.

34. Халмош (Halmos P. R.), Lectures on Boolean algebras, Van Nostrand Math. Studies, No. 1, Princeton, N. J., D. Van Nostrand, 1963.

35. Хилми (Hilmy H.), Sur les théorèmes de récurrence dans la dynamique générale, *Amer. J. Math.*, **61** (1939), 149—160.

36. Шёнфилд (Shoenfield J. R.), Mathematical logic, Reading, Mass., Addison-Wesley, 1967.

37. Шпильрайн (Szpilrajn E.), Remarques sur les fonc-

tions complètement additives d'ensemble et sur les ensembles joissant de la propriété de Baire, *Fund. Math.*, **22** (1934), 303—311.

38. Эрдёш (Erdös P.), Some remarks on set theory, *Ann. Math.* (2), **44** (1943), 643—646.
39. Contributions to the theory of games, Vol. 2, Annals of Math. Studies, No. 28, pp. 245—266, Princeton, N. J., Princeton Univ. Press, 1953.
40. Contributions to the theory of games, Vol. 3, Annals of Math. Studies, No, 39, pp. 159—163, Princeton Univ. Press., 1957.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

УВАЖАЕМЫЙ ЧИТАТЕЛЬ!

Ваши замечания о содержании книги, ее оформлении, качестве перевода и другие просим присылать по адресу: 129820, Москва, И-110, ГСП, 1-й Рижский пер., д. 2, издательство «Мир».

Дж. Окстоби

МЕРА И КАТЕГОРИЯ

Редактор *Н. Плужникова*
Художник *А. Шипов*
Художественный редактор *В. Шаповалов*
Технический редактор *Н. Толстякова*
Корректор *С. Лебедева*

Сдано в набор 5/V 1974 г.
Подписано к печати 23/X 1974 г.
Бум. тип. № 1 $84 \times 108^1/_{32}$=2,5 бум. л. Усл. печ. л. 8,4
Уч.-изд. л. 6,65 Изд. № 1/7479
Цена 48 коп. Зак. 193

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ордена Трудового Красного Знамени
Ленинградская типография № 2
имени Евгении Соколовой Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета
Министров СССР по делам издательств,
полиграфии и книжной торговли.
198052, Ленинград, Л-52, Измайловский
проспект, 29